

SOČ

**Numerické řešení rovnice geodetiky v obecné teorii relativity pro
extrémní Schwarzschildovu - de Sitterovu metriku**

Lubomír Košťál

SOČ

Číslo oboru: 02
Název oboru: FYZIKA

Název práce:

Numerické řešení rovnice geodetiky v obecné teorii relativity pro extrémní Schwarzschildovu - de Sitterovu metriku

Jméno autora: Lubomír Košťál
Ročník studia: 7.
Název školy: Gymnázium Nymburk
Adresa školy: Komenského 779
Nymburk
PSČ 288 02

Okres: Nymburk

Místo zpracování: Poříčany

Jméno konzultanta: RNDr. Jiří Podolský, CSc.
RNDr. Leoš Dvořák, CSc.
Katedra teoretické fyziky Matematicko fyzikální fakulta
University Karlovy, Praha

Práci zadal: RNDr. Jiří Podolský, CSc.

Obsah

1.	Úvod	
1.1.	Vymezení a význam problému.....	1
1.2.	Poznámky ke značení.....	2
2.	Teoretická část	
2.1.	Základní pojmy matematického a fyzikálního aparátu	
2.1.1.	Stručně o obecné teorii relativity.....	3
2.1.2.	Základy tenzorového počtu.....	5
2.1.3.	Derivace kovariantní a absolutní.....	9
2.1.4.	Rovnice geodetiky.....	11
2.1.5.	Nejdůležitější tenzory v obecné teorii relativity	
2.1.5.1.	Metrický tenzor.....	14
2.1.5.2.	Tenzor křivosti.....	16
2.1.5.3.	Tenzor energie-hybnosti.....	18
2.1.6.	Einsteinovy rovnice gravitačního pole.....	20
2.2.	Schwarzschildova metrika	
2.2.1.	Schwarzschildovo řešení jako úvodní příklad pro obecný postup řešení rovnice geodetiky.....	22
2.2.2.	Význam a základní vlastnosti Schwarzschildova řešení.....	23
2.3.	Extrémní Schwarzschildova - de Sitterova metrika	
2.3.1.	Extrémní Schwarzschildovo - de Sitterovo řešení a jeho vlastnosti	25
2.3.2.	Zavedení nulových Kruskalových souřadnic.....	27
3.	Metodika	
3.1.	Numerické řešení rovnice geodetiky pro hmotné částice ve Schwarzschildově metrice Eulerovou jednkrokovou metodou	
3.1.1.	Výpočet Christoffelových symbolů a sestavení rovnic.....	30
3.1.2.	Algoritmizace v jazyku C.....	32
3.2.	Numerické řešení rovnice geodetiky pro částice a tachyony ve Schwarzschildově - de Sitterově metrice pomocí programu Famulus	
3.2.1.	Výpočet Christoffelových symbolů a sestavení rovnic.....	33
3.2.2.	Program Famulus a algoritmizace úlohy.....	36
4.	Výsledky	
4.1.	Numerické řešení rovnice geodetiky pro hmotné částice ve Schwarzschildově metrice Eulerovou jednkrokovou metodou.....	38
4.2.	Numerické řešení rovnice geodetiky pro částice a tachyony ve Schwarzschildově - de Sitterově metrice pomocí programu Famulus.....	42
5.	Závěr a diskuse.....	46
6.	Resumé.....	47
7.	Seznam použité literatury.....	48

1. Úvod

1.1 Vymezení a význam problému

Einsteinova teorie gravitace - obecná teorie relativity - představuje velice rozsáhlý obor teoretické fyziky, v jehož rámci je dnes studováno velké množství otázek astrofyzikálního i kosmologického charakteru.

V souvislosti s tzv. inflačními modely vesmíru [8], [13] se od počátku 80. let pozornost teoretiků zaměřila na studium řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou. V tomto kontextu je často diskutován i tzv. kosmologický „no - hair“ teorém [1], [10], [16]. Ukazuje se totiž, že velká třída rozpínajících se vesmírů s kladnou kosmologickou konstantou se svými lokálními vlastnostmi blíží de Sitterovu řešení. Jestliže inflační fáze rozpínání raného vesmíru (popsaná de Sitterovým řešením) na sebe skutečně váže společné vlastnosti všech vesmírů s kladnou kosmologickou konstantou, pak se celý inflační scénář jeví velice přirozeným odůvodněním současné homogenity a izotropie vesmíru.

Velmi nedávno byl kosmologický „no-hair“ teorém vyšetřován i za přítomnosti gravitačních vln v prostoročasech s de Sitterovskou asymptotickou strukturou [12]. Bylo ukázáno, že se vyvine buď de Sitterovský prostoročas s malými perturbacemi nebo metrika Schwarzschildova - de Sitterova typu. Rovněž v práci [3] bylo ukázáno, že třída Robinsonových - Trautmanových vakuových řešení $m > 0$ a $\Lambda > 0$ se ve své daleké budoucnosti blíží asymptoticky Schwarzschildově - de Sitterově metrice.

Ukazuje se proto důležitým důkladně pochopit vlastnosti Schwarzschildova - de Sitterova řešení popisujícího sférické objekty v inflačním modelu vesmíru. Na toto téma byla již publikována řada původních prací, např. [2], [9]. Méně pozornosti bylo však věnováno tzv. extrémnímu případu, kdy hodnota kosmologické konstanty Λ a hmotnosti objektu M splňují podmínku $9\Lambda M^2 = 1$. Přitom některé vlastnosti extrémního řešení se liší od obecného případu, viz. např. [4], [7].

Smyslem předkládané práce je přispět k této problematice. Numerickým řešením rovnice geodetiky pro částice a tachyony v extrémní Schwarzschildově - de Sitterově metrice ($9\Lambda M^2 = 1$) získáváme lepší pochopení její globální struktury.

1.2. Poznámky ke značení

Dohoda:

Řecké indexy probíhají hodnoty: 0, 1, 2, 3

Latinské indexy probíhají hodnoty: 1, 2, 3

Nejčastěji používané značky a symboly:

c	Rychlost světla
$g_{\alpha\beta}$	Metrický tenzor
G	Gravitační konstanta
$G_{\alpha\beta}$	Einsteinův tenzor
m	Hmotnost
M	Hmotnost v geometrodynamických jednotkách
r	Radiální souřadnice
R	Skalární křivost
$R_{\alpha\beta}$	Ricciho tenzor křivosti
$R_{\beta\delta\mu}^{\alpha}$	Riemannův tenzor křivosti
t	Časová souřadnice
$T_{\alpha\beta}$	Tenzor energie-hybnosti
U^{α}, u^{α}	Čtyřrychlost
x^{α}	Časoprostorové souřadnice
δ_{β}^{α}	Kroneckerovo delta
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Christoffelovy symboly
φ	Úhel polární
θ	Úhel azimutální
τ	Vlastní čas, afinní parametr
$\operatorname{arccotg} x$	Arkuskotangens x
$\operatorname{arctg} x$	Arkustangens x
$\operatorname{cotg} x$	Kotangens x
$\operatorname{tg} x$	Tangens x

2. Teoretická část

2.1. Základní pojmy matematického a fyzikálního aparátu

2.1.1. Stručně o obecné teorii relativity

Relativistická fyzika, zvláště pak obecné teorie relativity (OTR), ovlivnila svým dosahem nejen celou fyziku, ale i novodobou filozofii, a její poznatky značně změnily lidský náhled na svět.

Zatímco některé poznatky speciální teorie relativity (STR) můžeme spatřovat již v pracích Poincarého a Lorentze, teprve Albert Einstein se odhodlal k vyslovení základních postulátů STR a obecná teorie relativity je pak již výlučně jeho dílem.

Nebude od věci velmi stručně shrnout vývoj, který vedl až k myšlenkám OTR.

Již K.F.Gauss uvažoval, že není důvodu k tomu, aby geometrie prostoru byla nutně eukleidovská. V polovině minulého století se B. Riemann snažil prokázat, že není nutné považovat prostor za samostatnou matematickou entitu stojící mimo hmotu a bez vztahu k ní. Kolem r. 1880 tuto myšlenku dále rozvíjel E. Mach a dospěl k závěru, že inerciální vlastnosti objektů jsou podmíněny rozložením hmoty v celém vesmíru (viz. [11]). Prostor (jeho geometrie) je tedy dynamickým prvkem, závislým na distribuci hmoty v něm.

Machovy teorie o původu kosmických setrvačných sil pozitivně ovlivnily Alberta Einsteina při koncipování OTR, která v podstatě znamenala kompletní revizi dosavadních představ prostoru a času. Vytvoření nedílného celku - prostoročasu, jehož geometrické vlastnosti jsou přímo určeny distribucí hmoty v něm, znamená zásadní obrat v názorech na podstatu gravitace. Skutečně, těžištěm OTR jsou tzv. rovnice gravitačního pole (Einstein je našel r. 1915), avšak teorie jako taková aspiruje i na obecnější popis veškerých fyzikálních zákonitostí vesmíru ve velkých měřítkách (makrosvět a megasvět). Vybudována na velmi obecných myšlenkách (princip ekvivalence, princip obecné kovariance), dovoluje ve svém rámci popsat a zobecnit i některé ostatní fyzikální teorie makro- a megasvěta.

Gravitace má však mezi ostatními interakcemi v přírodě zvláštní místo, neboť působí „univerzálně“ - gravitaci nemůžeme nikterak odstínit, je vlastní jakékoli formě hmoty (a potažmo tím i energii). OTR vysvětluje podstatu gravitace pomocí geometrie časoprostoru, popsanou základní veličinou celé teorie - metrickým tenzorem $g_{\alpha\beta}$. Odstraňuje ale i nesoulady v Newtonovské teorii gravitace - působení na dálku, stejné zrychlení udílené v gravitačním poli všem objektům, ale i drobné avšak principiální nesoulady s experimentem - stáčení Merkurova perihélia o přibližně 43'' za století apod. Stále probíhají nové a nové experimenty s modernějšími a přesnějšími přístroji, avšak do dnešního dne nebyl nalezen jediný rozpor mezi předpovědí OTR a skutečností. Namátkou jmenujme např. ohyb paprsků vlivem gravitačního pole slunce, dále pokusy Rebky a Pounda na měření rudého posuvu, ale i objev dvojného pulsaru PSR 1913+16 (nazývaného pro svou vhodnost ke zkoumání efektů OTR „relativistickou laboratoří“) nebo rentgenový zdroj Cyg X-1, jež je pravděpodobně první pozorovanou černou dírou.

Díky svým výše popsaným skutečnostem může být OTR aplikována na otázky vzniku a vývoje našeho vesmíru. Tato oblast vskutku zaznamenala ohromný pokrok - připomeňme jen formulaci standardních kosmologických modelů, vznik relativistické astronomie apod. Ke kompletnímu popisu vývoje vesmíru je však nutno použít i zákony mikrofyziky a zde přicházíme k zásadnímu problému, neboť kvantová mechanika není dosud slučitelná s

OTR. Je tedy úkolem moderní teoretické fyziky najít jednotnou (unitární) teorii popisující všechny druhy interakcí a dokončit tak proces sjednocování ve fyzice.

Závěrem by bylo vhodné zmínit i jiné teorie gravitace. Již v době před OTR byly činěny pokusy na uspokojivější vysvětlení tohoto fenoménu. I během vývoje OTR a po něm vznikaly teorie popisující gravitační pole jako čistě skalární, vektorové nebo tenzorové. Jsou ale i další, např. tzv. Bransova-Dickeova teorie, která je v podstatě modifikovanou Einsteinovskou teorií, vychází přitom ze silného Machova principu. Zajímavé je, že OTR je ze všech ostatních kandidátů na úplnou teorii gravitace nejen v nejlepším souladu s experimentem, ale je v podstatě také nejjednodušší a nejpřirozenější. Ostatní teorie obsahují, kromě jiných nevýhod, různé, předem neurčené parametry, které je možno a nutno nastavit tak, aby došlo k jejich souhře s měřením.

2.1.2. Základy tenzorového počtu

Zvolme v prostoru tři nekomplanární vektory (t.j. neležící v jedné rovině), standardně je označme e_1, e_2, e_3 . Je jimi jednoznačně určena lokální soustava souřadnic tak, že každý vektor a můžeme zapsat právě jedním způsobem ve tvaru:

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 \quad (1)$$

Čísla $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ se nazývají kontravariantní souřadnice vektoru a v soustavě e_1, e_2, e_3 . Zvolíme-li v prostoru jiné tři nekomplanární vektory e'_1, e'_2, e'_3 . K čárkované soustavě můžeme přejít pomocí rovnic:

$$\begin{aligned} e'_1 &= e^1_1 e_1 + e^2_1 e_2 + e^3_1 e_3 \\ e'_2 &= e^1_2 e_1 + e^2_2 e_2 + e^3_2 e_3 \\ e'_3 &= e^1_3 e_1 + e^2_3 e_2 + e^3_3 e_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Neboli:

$$e'_i = \sum_{j=1}^3 e^j_i e_j$$

V tenzorovém počtu je však zvykem využívat tzv. součtové konvence, která umožňuje zestručnit a zpřehlednit matematický zápis vynecháním sumačního symbolu Σ . Spočívá v tom, že pokud se v součinu vyskytuje některý index dvakrát, pak sčítáme přes všechny hodnoty, kterých tento index může nabývat. Rovnost (1) tedy zapisujeme takto:

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha^i e_i = \alpha^i e_i$$

Tohoto pravidla budeme i nadále užívat. Transformační rovnice (2) stručně přepíšeme:

$$e'_i = e^j_i e_j \quad (3)$$

Matice e^j_i se nazývá matice přechodu. Jelikož je její determinant nenulový můžeme přejít od čárkované zpět k nečárkované soustavě souřadnic analogicky:

$$e_i = f^j_i e'_j$$

Matice f^j_i je maticí inverzní k e^j_i . Ptáme se, jak se budou pomocí (2) a (3) transformovat kontravariantní souřadnice vektoru a z nečárkované do čárkované soustavy. Vzhledem k (1) a (2) použijeme matici transponovanou k matici f^j_i , tedy matici f^i_j a bude platit:

$$\alpha^i = f^i_j \alpha'^j \quad (4)$$

A analogicky pro přechod od e'_1, e'_2, e'_3 k e_1, e_2, e_3 :

$$\alpha^i = e^i_j \alpha'^j \quad (5)$$

Vzhledem k definici matice inverzní k dané matici musí také platit:

$$e^j_i f^k_j = \delta^k_i \quad (6)$$

Symbol δ^k_j se nazývá Kroneckerovo delta a platí pro něj:

$$\delta^k_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } k=j \\ 0 & \text{pro } k \neq j \end{cases}$$

Máme-li definovány kontravariantní souřadnice vektoru, zavedeme i kovariantní souřadnice. Užijeme k tomu matici:

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j \quad (7)$$

kde e_i jsou vektory nečárkované báze. Potom:

$$\begin{aligned} a_1 &= g_{1j} a^j \\ a_2 &= g_{2j} a^j \\ a_3 &= g_{3j} a^j \end{aligned} \quad (8)$$

určují tzv. kovariantní souřadnice vektoru a v soustavě určené e_i . Zbývá ještě dodat, že podobně jako svými kontravariantními souřadnicemi je i svými kovariantními souřadnicemi vektor v dané bázi jednoznačně určen. Transformační vztahy pro kovariantní složky vektoru a jsou:

$$\begin{aligned} a'_i &= e'_i a_j \\ a_i &= f_i^j a'_j \end{aligned} \quad (9)$$

Pomocí kontravariantních a kovariantních složek vektoru můžeme definovat jeho skalární součin s jiným vektorem. Tak pro vektory a a b platí:

$$a \cdot b = a^i b_i = a_j b^j = g_{ij} a^i b^j \quad (10)$$

Vidíme, že kontravariantní resp. kovariantní složky vektoru (tedy trojice čísel a^i resp. a_i) jsou přiřazena a v dané souřadné soustavě lokálně určené e_i a transformují se přesně podle daných pravidel - viz. (4), (5) a (9). Tohoto využijeme k obecné definici tenzoru.

Řekneme, že v dané soustavě souřadnic určené e_i máme dán tenzor m krát kontravariantní a n krát kovariantní, jestliže je soustavě určené e_i přiřazeno 3^{m+n} čísel $t_{st\dots}^{lmn\dots}$, která se transformují do souřadného systému určeného e'_i podle vzorců:

$$t'_{pqr\dots}{}^{ijk\dots} = \underbrace{f_i^j f_m^k f_n^l \dots}_{A} \underbrace{e_p^s e_q^t e_r^v \dots}_{B} t_{st\dots}^{lmn\dots} \quad (11)$$

Z definice je jasné, že počet horních („kontravariantních“) indexů je m , počet dolních („kovariantních“) je n . Celkový počet čísel je pak 3^{m+n} neboť uvažujeme 3 rozměry. Všimněme si analogie s transformačními vzorci (4), (5) a (9). V případě (11) jsme nejprve v části A transformovali kontravariantní složky tenzoru $t_{st\dots}^{lmn\dots}$, v části B pak jeho kovariantní složky. Tenzor pro který je $m=0$ resp. $n=0$ se nazývá kovariantní resp. kontravariantní tenzor. Dále součet čísel $m+n$ určuje řád tenzoru (např. tenzor druhého řádu).

V souladu s předešlým odstavcem můžeme skalár považovat za tenzor nultého řádu, vektor za tenzor prvního řádu.

Všimněme si blíže čísel g_{ij} definovaných v (7). I ony jsou jednoznačně přiřazeny každé soustavě souřadnic určené e_i a transformují se podle vzorce (11). Tvoří tedy souřadnice dvakrát kovariantního tenzoru zvaného metrický tenzor. Jeho klíčového významu pro OTR si všimneme více na příslušných místech. $\text{Det } g_{ij} \neq 0$, takže je možno sestrojít i inverzní matici k g_{ij} , dvakrát kontravariantní metrický tenzor g^{ij} a platí (viz. (6)):

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

To, co jsme zde uvedli pro tenzory definované v trojrozměrném prostoru platí zcela obecně i pro tenzory dané ve čtyřech a více rozměrech. V našem případě stačí pouze formálně zaměnit latinské indexy za řecké (viz. kap. 1.2.). Danou soustavu souřadnic pak

můžeme lokálně určit 4 nekomplanárními vektory e_α , počet transformačních rovnic (2) se zvýší na 4, celkový počet obecně nezávislých složek tenzoru např.: $t_\gamma^{\alpha\beta}$ je $4^{(2+1)}=64$, atd.

V OTR často počítáme se vzdálenostmi blízkých bodů. Odečtením transformačních vzorců (např. (4)) v různých bodech dostaneme vztah pro transformaci rozdílu souřadnic, tedy (přecházíme k řecké indexaci):

$$\Delta x'^\alpha = f_\beta^\alpha \Delta x^\beta \quad (12)$$

kde $\Delta x'^\alpha, \Delta x^\beta$ značí příslušné rozdíly, f_β^α má analogický význam jako f_j^i zavedená v (3). V OTR je však vhodné přecházet k menším a menším rozdílům souřadnic, uvažujeme (nekonečně malé) tzv. infinitesimální přírůstky souřadnic, počítáme podle pravidel diferenciálního počtu.

$$dx'^\alpha = f_\beta^\alpha dx^\beta \quad (13)$$

Označme si čárkovaný souřadný systém x'^α a nečárkovaný x^α , přičemž x'^α jsou spojitou diferencovatelnou funkcí proměnných x^α a naopak. Stručně zapíšeme:

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= x'^\alpha(x^\beta) \\ x^\alpha &= x^\alpha(x'^\beta) \end{aligned} \quad (14)$$

Díky této podmínce můžeme diferenciál dx'^α ze (13) vyjádřit také takto:

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad (15)$$

Porovnáním (15) a (13) dostáváme:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = f_\beta^\alpha \quad (16)$$

Tento vztah je velice významný, neboť nám říká, jak transformovat tenzorové veličiny za předpokladu (14) v souladu s (11):

$$t_{\mu\rho\sigma\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\sigma} \dots \frac{\partial x'^1}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\sigma} \dots t_{\eta\kappa\lambda\dots}^{\nu\omega\pi\dots} \quad (17)$$

Nyní můžeme definovat některé základní operace s tenzory.

Sčítání můžeme provést pokud oba tenzory jsou stejného typu (m krát kontravariantní, n krát kovariantní):

$$a_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots} = b_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots} + c_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots}$$

Násobení tenzorů, je-li $b_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots}$ m_1 krát kontravariantní a n_1 krát kovariantní, $c_{\mu\lambda\dots}^{\sigma\rho\dots}$ m_2 krát kontravariantní a n_2 krát kovariantní, pak:

$$a_{\gamma\delta\dots\mu\lambda\dots}^{\alpha\beta\dots\sigma\rho\dots} = b_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots} c_{\mu\lambda\dots}^{\sigma\rho\dots}$$

kde $a_{\gamma\delta\dots\mu\lambda\dots}^{\alpha\beta\dots\sigma\rho\dots}$ je tenzor $(m_1 + m_2)$ krát kontravariantní a $(n_1 + n_2)$ krát kovariantní.

Zúžení tenzoru je operace, při které sčítáme přes libovolné dva indexy a dostáváme tak tenzor řádu o dva stupně nižší. Např.:

$$a_\delta^\gamma = b_{\alpha\delta}^{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha=0}^3 b_{\alpha\delta}^{\alpha\gamma}$$

Ke každému tenzoru m krát kontravariantnímu a n krát kovariantnímu lze sestavit tenzor $(m+n)$ krát kovariantní, resp. $(m+n)$ krát kontravariantní pomocí operací:

$$a_{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots} = g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} a_{\gamma\delta\dots}^{\sigma\rho\dots}$$

resp.

$$a^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots} = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} a_{\sigma\rho\dots}^{\gamma\delta\dots}$$

Tečkou vyznačujeme, u kterých indexů se tak stalo, např.:

$$a_{\cdot\beta\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\sigma} a_{\sigma\beta\gamma}$$

Symetrický tenzor vzhledem k daným dolním resp. horním indexům nazývá se ten, jehož hodnota se při libovolné permutaci těchto indexů nemění. Např. metrický tenzor:

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha} \cdot e_{\beta} = e_{\beta} \cdot e_{\alpha} = g_{\beta\alpha}$$

Antisymetrický tenzor vzhledem k daným dolním resp. horním indexům nazývá se ten, jehož hodnota při výměně libovolných dvou těchto indexů změní znaménko. Např.:

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$$

Na závěr je vhodné vyzvednout význam tenzorového počtu pro OTR. Jeden ze základních principů OTR - princip obecné kovariance totiž žádá, aby fyzikální zákony měly ve všech vztažných soustavách stejný tvar. Všimněme si toho, že transformací tenzoru do jiné soustavy souřadnic obdržíme opět tenzor. Jinými slovy - pokud se nám podaří zapsat fyzikální zákony ve formě tenzorových veličin a diferenciálních rovnic mezi nimi, bude princip obecné kovariance (invariance) splněn.

2.1.3. Derivace kovariantní a absolutní

Na konci minulé kapitoly jsme zmínili nutnost zápisu fyzikálních zákonů ve formě tenzorových veličin a diferenciálních rovnic mezi nimi. Zkusme se nyní blíže podívat na charakter derivace v obecně zakřiveném prostoročase.

Mějme dáno nějaké obecné vektorové pole A^α . Parciální derivací tohoto pole podle souřadnic x^β zjišťujeme, jak se toto pole mění s místem. Je dána jako limitní podíl:

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = A^\alpha_{;\beta} = \lim_{\Delta x^\beta \rightarrow 0} \frac{A^\alpha(x^\beta + \Delta x^\beta) - A^\alpha(x^\beta)}{\Delta x^\beta} \quad (18)$$

kde jsme parciální derivaci označili symbolicky čárkou. Hodnotu A^α počítáme ve dvou různých bodech: $x^\beta + \Delta x^\beta$ a x^β . Jelikož však uvažujeme obecně zakřivený prostoročas, je jasné, že hodnoty vektoru A^α jsou vztaženy k různým lokálním bázím (dané v každém bodě) a to právě v bodech $x^\beta + \Delta x^\beta$ a x^β . Čili obě hodnoty nemůžeme přímočaře porovnávat. Dalším zřejmým problémem je to, že se tato derivace ($A^\alpha_{;\beta}$) netransformuje jako tenzorová veličina, jelikož matice transformace se obecně v různých bodech liší.

Řešením bude počítat limitní podíl (18) v jednom bodě, tedy přenést vektor $A^\alpha(x^\beta + \Delta x^\beta)$ zpět do bodu o souřadnicích x^β a zde vypočítat příslušnou derivaci. Přitom se ovšem složky vektoru A^α změní o nějakou hodnotu δA^α . Pro jejich hodnotu zavedeme obecně vztah:

$$\delta A^\alpha = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu (-\Delta x^\beta) \quad (19)$$

kde veličina $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ značí tzv. Christoffelovy symboly. Jejich významu si blíže všimneme až v následující kapitole. Je třeba zdůraznit, že Christoffelovy symboly netvoří tenzor třetího řádu. V jedné soustavě souřadnic mohou být nenulové, a v jiné soustavě v témže bodě naopak mohou mít všechny hodnotu nula.

Pro paralelní přenos obecného tenzoru platí (přenášíme-li o $-\Delta x^\gamma$):

$$\delta t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta\dots} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha t_{\gamma\delta}^{\mu\beta\dots} \Delta x^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\beta t_{\gamma\delta}^{\alpha\mu\dots} \Delta x^\nu \dots - \Gamma_{\gamma\nu}^\mu t_{\mu\delta}^{\alpha\beta\dots} \Delta x^\nu - \Gamma_{\delta\nu}^\mu t_{\gamma\mu}^{\alpha\beta\dots} \Delta x^\nu \dots \quad (20)$$

Označíme-li složky paralelně přeneseného vektoru z bodu $x^\beta + \Delta x^\beta$ do x^β jako \bar{A}^α , pak pro ně použitím (19) píšeme:

$$\bar{A}^\alpha(x^\beta + \Delta x^\beta) = A^\alpha(x^\beta + \Delta x^\beta) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu \Delta x^\beta \quad (21)$$

Nyní již můžeme dosadit do vztahu pro derivaci (18) a dostaneme:

$$A^{\alpha}_{;\beta} = \lim_{\Delta x^{\beta} \rightarrow 0} \frac{\bar{A}^{\alpha}(x^{\beta} + \Delta x^{\beta}) - A^{\alpha}(x^{\beta})}{\Delta x^{\beta}} = \lim_{\Delta x^{\beta} \rightarrow 0} \frac{A^{\alpha}(x^{\beta} + \Delta x^{\beta}) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} \Delta x^{\beta} - A^{\alpha}(x^{\beta})}{\Delta x^{\beta}} \quad (22)$$

Tato derivace se nazývá kovariantní a značíme ji symbolicky středníkem. Úpravou (22), dostaneme:

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} \quad (23)$$

Kovariantní derivace má tenzorové transformační vlastnosti a nahrazuje obyčejnou parciální derivaci na zakřivených prostorech. Dále dodejme, že kovariantní derivaci kovariantního vektoru zapíšeme jako:

$$A_{\alpha;\beta} = A_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A_{\mu} \quad (24)$$

Nyní již můžeme sestavit zákon pro kovariantní derivování obecného tenzoru užitím (20), (23) a (24):

$$t^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots;v} = t^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots,v} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} t^{\mu\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} t^{\alpha\mu\dots}_{\gamma\delta\dots} \dots - \Gamma^{\mu}_{\gamma\nu} t^{\alpha\beta\dots}_{\mu\delta\dots} - \Gamma^{\mu}_{\delta\nu} t^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\mu\dots} \dots \quad (25)$$

Další otázkou je, jak postupovat v případě, kdy vektorové pole derivujeme podle nějakého parametru např. u (resp. podle křivky dané $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$), přičemž toto pole je dáno buď v celém okolním prostoru nebo alespoň na křivce dané $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$. Zapíšeme-li si tuto derivaci jako (v analogii s (18)):

$$\frac{dA^{\alpha}(x^{\beta}(u))}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A^{\alpha}(x^{\beta}(u + \Delta u)) - A^{\alpha}(x^{\beta}(u))}{\Delta u} \quad (26)$$

vidíme, že se ocitáme v podobné situaci jako u (18), ale tento problém máme již vyřešen. Vyjádříme-li si:

$$\Delta x^{\beta} = \frac{dx^{\beta}}{du} \Delta u$$

můžeme zavést tzv. absolutní derivaci, tj. derivaci s příslušnou „opravou“ složek vektoru a tím pádem upravenou pro použití v zakřivených prostoročasech. Absolutní derivaci pole A^{α} podle parametru u získáme (viz. kovariantní derivace):

$$\frac{DA^{\alpha}}{du} = \frac{dA^{\alpha}}{du} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} A^{\beta} \frac{dx^{\mu}}{du} \quad (27)$$

Jestliže je pole A^{α} definováno i v okolí křivky $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$, můžeme zapsat vztah mezi absolutní a kovariantní derivací takto:

$$\frac{DA^{\alpha}}{du} = A^{\alpha}_{;\mu} \frac{dx^{\mu}}{du}$$

2.1.4. Rovnice geodetiky

Podle principu ekvivalence je možno v každém bodě prostoročasu zavést *lokálně* inerciální systém. To platí i za přítomnosti gravitačního pole, což lze ověřit známým pokusem, kdy předměty pohybující se volně v gravitačním poli se nacházejí ve stavu beztlíže.

Sledujme tedy pohyb částice v lokálně inerciální soustavě x^α . Musí zde platit:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = 0 \quad (28)$$

Připomeňme, že proměnná τ značí vlastní čas částice (invariantní veličina), spočtený na základě známého vzorce ze STR:

$$dt = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} \quad \text{kde} \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ds^2 značí tzv. čtyřinterval (také invariantní veličina), který zapíšeme v ekvivalentním tvaru v souřadnicích x^α :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (29)$$

kde $\eta_{\alpha\beta}$ je tzv. Minkowského tenzor se složkami:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformujme nyní čtyřinterval (29) do obecných souřadnic x^α . (Viz. kap. 2.1.2.):

$$x^\alpha = x^\alpha(x^\beta)$$

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta$$

takže v obecných souřadnicích můžeme psát:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (30)$$

(Všimněme si metrického tenzoru. Název „metrický“ je jak patrně odůvodněn tím, že nám umožňuje určovat prostoročasové intervaly (30). Zároveň zde splňuje transformační vztahy uvedené v kapitole 2.1.2.)

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu} \quad (31)$$

Nakonec ještě zobecníme vztah pro $d\tau$:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (32)$$

Transformujme nyní celou rovnici volného pohybu částice (28) do obecných souřadnic:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\beta}{d\tau} \right)$$

Upravíme:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$

Nyní vynásobíme členem $\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha}$:

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$

Takže nakonec dostaneme:

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (33)$$

Tato rovnice se nazývá rovnice geodetiky a má pro předkládanou práci klíčový význam. Popisuje totiž pohyb volné testovací částice (popř. i tachyonu, pro který ovšem τ nemá význam vlastního času, ale tzv. afinního parametru měnícího se spojitě podél celé trajektorie (geodetiky)).

Čtyřrychlost částice definujeme, jak známo:

$$\frac{dx^\gamma}{d\tau} = u^\gamma \quad (34)$$

Norma čtyřrychlosti $u^\mu u_\mu$ musí být zachována podél celé trajektorie. Pro normalizovaný parametr τ (popř. vlastní čas) pak platí:

$$u^\mu u_\mu = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \begin{cases} -c^2 & \text{geodetika časupodobná} \\ 0 & \text{geodetika světelná} \\ c^2 & \text{geodetika prostorupodobná} \end{cases}$$

Jen připomeneme, že případ $-c^2$ platí pro částice, 0 pro fotony, c^2 pro tachyony. Přepíšeme rovnici (33) dosazením (34):

$$\frac{du^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} u^\beta u^\mu = 0 \quad (35)$$

Uvědomme si, že vektor čtyřrychlosti částice je dán v každém bodě její trajektorie, tj. křivky $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$. Použijeme tedy absolutní derivaci a dostaneme:

$$\frac{Du^\nu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\beta\mu}^\nu u^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (36)$$

Porovnáním s (6) získáme důležitý vztah:

$$\Gamma_{\beta\mu}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \quad (37)$$

Christoffelovy symboly můžeme však vyjádřit i pomocí metrického tenzoru. Derivujeme-li transformační rovnici (4) podle x^ρ dostaneme:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho}$$

Vypočteme-li vhodnou kombinaci parciálních derivací $g_{\alpha\beta}$ dostáváme:

$$\left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right) = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\rho} = 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho}$$

Odtud násobením $\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right) \quad (38)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$$

Tím máme zavedeny Christoffelovy symboly pomocí metrického tenzoru a jeho derivací.

2.1.5. Nejdůležitější tenzory v obecné teorii relativity

2.1.5.1. Metrický tenzor

S metrickým tenzorem jsme se seznámili již v kapitole 2.1.2. a v kapitole 2.1.4. byl odůvodněn název „metrický“ tím, že nám umožňuje určovat časoprostorové vzdálenosti pomocí přírůstků souřadnic.

Jeho klíčový význam pro OTR lze ilustrovat na následujícím jednoduchém příkladě.

Mějme dānu *inerciální* vztažnou soustavu a v ní zavedené cylindrické souřadnice x^α vztahy:

$$\begin{aligned}x^0 &= ct' \\x^1 &= r' \cos\varphi' \\x^2 &= r' \sin\varphi' \\x^3 &= z'\end{aligned}\tag{39}$$

Čtyřinterval je:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Abychom mohli za dx^α dosadit (39), musíme spočítat diferenciály:

$$\begin{aligned}dx^0 &= c dt' \\dx^1 &= dr' \cos\varphi' - r' \sin\varphi' d\varphi' \\dx^2 &= dr' \sin\varphi' + r' \cos\varphi' d\varphi' \\dx^3 &= dz'\end{aligned}$$

takže po úpravě:

$$ds^2 = -c^2 dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\varphi'^2 + dz'^2\tag{40}$$

Mějme dále dānu neinerciální soustavu souřadnic x^α (také cylindrických). Ta má se soustavou x'^α společnou osu z , kolem níž rotuje úhlovou rychlostí ω . Vztahy mezi souřadnicemi pak jsou:

$$\begin{aligned}t &= t' \\r &= r' \\ \varphi + \omega t' &= \varphi' \\z &= z'\end{aligned}$$

Diferencováním a dosazením do (40) za čárkované souřadnice dostaneme po úpravě tvar:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 + 2\omega r^2 d\varphi dt\tag{41}$$

Zapišeme-li v obvyklém tvaru:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (42)$$

pak složky metrického jsou dány:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(1 - \omega^2 r^2 / c^2) & 0 & \omega r^2 / c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega r^2 / c & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

(Nezapomeňme, že ve vzorci (42) užíváme sumační pravidla, a že $x^0 = ct$.)

Podle principu ekvivalence je gravitační pole lokálně ekvivalentní poli tzv. setrvačných sil. V rotující (nečárkované) soustavě pozorujeme právě takové pole. Z tohoto vyplývá, že gravitační pole lze vhodným způsobem popsat právě metrickým tenzorem, metrikou.

2.1.5.2. Tenzor křivosti

V plochem prostoru jsou smíšené parciální derivace záměnné, t.j. platí např.:

$$\frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\delta} = \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\delta \partial x^\beta}$$

Ověříme, že toto pravidlo pro zakřivené prostory obecně neplatí. Musíme ovšem počítat s „opravou na konexi“, t.j. použít kovariantní derivace. Užitím příslušných pravidel (viz. kap. 2.1.3.) máme:

$$\begin{aligned} A^\alpha_{;\beta} &= \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu \\ (A^\alpha_{;\beta})_{;\delta} &= \frac{\partial(A^\alpha_{;\beta})}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\psi\delta}^\alpha (A^\psi_{;\beta}) - \Gamma_{\beta\delta}^\psi (A^\alpha_{;\psi}) \end{aligned} \quad (44)$$

a

$$\begin{aligned} A^\alpha_{;\delta} &= \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\mu\delta}^\alpha A^\mu \\ (A^\alpha_{;\delta})_{;\beta} &= \frac{\partial(A^\alpha_{;\delta})}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\psi\beta}^\alpha (A^\psi_{;\delta}) - \Gamma_{\beta\delta}^\psi (A^\alpha_{;\psi}) \end{aligned}$$

Dalšími úpravami:

$$\begin{aligned} (A^\alpha_{;\beta})_{;\delta} &= \left[\frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\delta \partial x^\beta} + \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\delta} \right) A^\mu + \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\delta} \right) \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right] + \Gamma_{\psi\delta}^\alpha \left(\frac{\partial A^\psi}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\psi A^\mu \right) - \Gamma_{\beta\delta}^\psi \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\psi} + \Gamma_{\mu\psi}^\alpha A^\mu \right) \\ (A^\alpha_{;\delta})_{;\beta} &= \left[\frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\delta} + \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\delta}^\alpha}{\partial x^\beta} \right) A^\mu + \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} \right) \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \right] + \Gamma_{\psi\beta}^\alpha \left(\frac{\partial A^\psi}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\mu\delta}^\psi A^\mu \right) - \Gamma_{\beta\delta}^\psi \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\psi} + \Gamma_{\mu\psi}^\alpha A^\mu \right) \end{aligned}$$

a

Odečtením píšeme:

$$A^\alpha_{;\beta;\delta} - A^\alpha_{;\delta;\beta} = -R_{\mu\beta\delta}^\alpha A^\mu \quad (45)$$

kde

$$R_{\mu\beta\delta}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\mu\delta}^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\mu\delta}^\psi \Gamma_{\psi\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\psi \Gamma_{\psi\delta}^\alpha$$

Zjistili jsme, že smíšené derivace v křivých prostorech obecně nejsou komutativní, přičemž mírou této nekomutativnosti je právě veličina $R_{\mu\beta\delta}^\alpha$, která se nazývá Riemannův tenzor křivosti. Jedná se o tenzor 4. řádu, neboť na levé straně (2) je tenzor 3. řádu a na pravé $R_{\mu\beta\delta}^\alpha$ a tenzor 1. řádu (čtyřvektor).

Rovnost:

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\delta} = 0$$

je jednoznačným kritériem, podle kterého určíme, že daný prostor je nezakřivený. Odlišíme tak od sebe případ křivočarých souřadnic na ploché varietě od skutečně neeukleidovského prostoru.

Poznamenejme dále, že platí:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\rho\psi} &= g_{\alpha\delta} R^{\delta}_{\beta\rho\psi} \\ R_{\alpha\beta\rho\psi} &= -R_{\beta\alpha\rho\psi} = -R_{\alpha\beta\psi\rho} = R_{\psi\rho\beta\alpha} \end{aligned}$$

Postupným úžením Riemannova tenzoru křivosti dostáváme tzv. Ricciho tenzor křivosti:

$$R_{\beta\psi} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\psi} \quad R_{\beta\psi} = R_{\psi\beta}$$

a tzv. skalární křivost:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}$$

Jejich kombinací vznikne tzv. Einsteinův tenzor křivosti, který má v OTR velmi důležité postavení:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \\ G_{\alpha\beta} &= G_{\beta\alpha} \\ G^{\alpha\beta}_{;\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Důležitá je třetí vlastnost (jak poznáme v souvislosti s tenzorem energie-hybnosti), která říká, že kovariantní čtyřdivergence Einsteinova tenzoru je rovna nule.

2.1.5.3. Tenzor energie-hybnosti

V Einsteinových rovnicích gravitačního pole vystupuje tzv. tenzor energie-hybnosti. Jeho význam lze ilustrovat na následujícím příkladu, kdy je hmotný obsah vesmíru dán spojitým rozložením - kontinuem bez tlaku (prach).

Jednou z nejdůležitějších rovnic v mechanice kontinua je rovnice kontinuity, která vyjadřuje zákon zachování hmotnosti proudící kapaliny. Má jak známo tvar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (46)$$

Vyšetřujeme-li kontinuum, zajímá nás, s jakou hustotou jsou jednotlivé základní fyzikální charakteristiky v kontinuu rozprostřeny a jak v systému proudí.

Složky čtyřhybnosti ve speciální teorii relativity můžeme zapsat jako:

$$p^\alpha = \left(\frac{E}{c}; p^j \right) \quad (47)$$

To nám umožní zkonstruovat vlastní tenzor energie-hybnosti. Lokální zákon zachování energie-hybnosti pak v souladu s (46) a (47) můžeme sloučit do jedné tenzorové rovnice:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (48)$$

vzhledem k tomu, že složky čtyřrychlosti jsou:

$$u^\alpha = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^j}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

je $T^{\alpha\beta}$ symetrický tenzor energie-hybnosti se složkami:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & \frac{v^1 v^1}{c^2} & \frac{v^1 v^2}{c^2} & \frac{v^1 v^3}{c^2} \\ \frac{v^2}{c} & \frac{v^2 v^1}{c^2} & \frac{v^2 v^2}{c^2} & \frac{v^2 v^3}{c^2} \\ \frac{v^3}{c} & \frac{v^3 v^1}{c^2} & \frac{v^3 v^2}{c^2} & \frac{v^3 v^3}{c^2} \end{pmatrix} \quad (49)$$

kde výraz:

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

je roven relativistické hustotě energie. Složky $T^{\alpha 0} = T^{0\alpha}$ jsou rovny hustotě toku energie děleného c , resp. hustotě toku hybnosti násobeného c . Všimněme si prostorových složek, tedy T^{ij} . Jedná se vlastně o i -tou složku síly působící na daný objemový element dV přes jednotkovou plošku s normálovým vektorem \mathcal{x}^j - tedy o tenzor napětí. Zajímavého aspektu zobecnění (48) pro křivý prostoročas si všimneme v následující kapitole.

2.1.6. Einsteinovy rovnice gravitačního pole

Rovnice pole mají obecný tvar

„objekt popisující pole = objekt popisující zdroj“

V případě gravitačního pole tedy bude:

„objekt popisující geometrii prostoročasu = objekt popisující rozložení hmoty (energie)“

Objektem popisujícím gravitační pole je Einsteinův tenzor křivosti, objekt popisující distribuci hmoty a energie je tenzor energie-hybnosti.

Einstein předpokládal následující závislost obou veličin:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = k T_{\alpha\beta}$$

Einsteinovy rovnice musí v limitě slabého gravitačního pole přejít na Newtonův gravitační zákon ve tvaru Poissonovy rovnice, takže lze ukázat, že konstanta k je dána

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Einsteinovy rovnice gravitačního pole proto jsou:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (50)$$

Z matematického hlediska jsou to *nelineární* parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Jejich řešením (při zadaném tenzoru energie-hybnosti) je deset funkcí $g_{\alpha\beta}$ popisujících vlastnosti gravitačního pole. Důsledkem jejich značné komplikovanosti je nemožnost v obecném případě nalézt analytické řešení. Proto často řešíme případy, kdy gravitační pole má navíc jistou symetrii (centrální, osovou apod.), čímž se zmenší počet nezávislých rovnic.

Vzhledem k tomu, že kovariantní čtyřdivergence Einsteinova tenzoru křivosti vymizí, kovariantní čtyřdivergence tenzoru energie-hybnosti je také nula. Platí lokální zákon zachování energie - hybnosti) ve tvaru:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\beta} T^{\alpha\mu} = 0$$

V souvislosti s OTR ještě zavedme tzv. geometrodynamickou soustavu jednotek. Nejdůležitějším přínosem OTR je, že spojila prostor a čas do nedělitelného kontinua. Je zbytečné měřit vzdálenosti ve dvou jednotkách (metry a sekundy). Zavedeme tedy čas v geometrodynamických jednotkách $[g]$ jako:

$$t_{[g]} = t_{[s]} \cdot c$$

$$[t_{[g]}] = m \text{ (metr)}$$

OTR také stírá rozdíl mezi setrvačnou a gravitační hmotností. Hmotota zakřivuje prostoročas, čili zakřivení je mírou její hmotnosti. Zavedeme geometrodynamickou hmotnost M :

$$M_{[g]} = m_{[s]} \cdot \frac{G}{c^2}$$

$$[M_{[g]}] = m(\text{metr})$$

Uveďme ještě několik dalších veličin:

rychlost	$v_{[g]} = v_{[s]} \cdot \frac{1}{c}$	$v_{[g]}$ <i>bezrozměrná</i>
hybnost	$p_{[g]} = p_{[s]} \cdot \frac{G}{c^3}$	$[p_{[g]}] = m$
moment hybnosti	$J_{[g]} = J_{[s]} \cdot \frac{G}{c^3}$	$[J_{[g]}] = m^2$
elektrický náboj	$Q_{[g]} = Q_{[s]} \cdot \frac{\sqrt{G}}{c \cdot 10^{3/2}}$	$[Q_{[g]}] = m$

Zavedení geometrodynamické soustavy jednotek v OTR je zcela přirozené. Usnadňuje a zpřehledňuje nám matematický zápis. Pokud nebude uvedeno jinak, v dalším textu budeme používat právě tuto soustavu.

2.2. Schwarzschildova metrika

2.2.1. Schwarzschildovo řešení jako úvodní příklad pro obecný postup řešení rovnice geodetiky

Schwarzschildovo řešení [11] je jistě jedno z nejdůležitějších řešení Einsteinových rovnic vůbec. Bylo nalezeno již. r. 1916 K. Schwarzschildem jakožto historicky vůbec první (netriviální) přesné řešení. Popisuje středově symetrické gravitační pole, bude tedy přirozené zavést (pseudo)sférické souřadnice (t, r, θ, φ) . Asymptotická struktura tohoto řešení je pseudo(eukleidovská), čili v nekonečné vzdálenosti od zdroje je prostoročas asymptoticky plochý. Budeme se zabývat jen tzv. vnějším Schwarzschildovým řešením, t.j. řešením mimo zdroj gravitačního pole ($T^{\alpha\beta} = 0$), takže hledáme řešení vakuových Einsteinových rovnic. Čtyřinterval bude mít vzhledem ke kladeným podmínkám tvar:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

přičemž složky metrického tenzoru jsou:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (51)$$

čtyřinterval můžeme zapsat v jednotkách *SI*:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (52)$$

Toto řešení popisuje gravitační pole buzené hmotou m soustředěnou v $r=0$ nebo gravitační pole vně sféricky symetrické hvězdy hmotnosti m . Vzhledem k tomu, že metrika (51) je poměrně jednoduchá a navíc má jasné astrofyzikální aplikace, ukážeme na ní obecný postup řešení rovnice geodetiky. Uvidíme, jak se bude OTR lišit od Newtonovské předpovědi. Vlastní sestavení a řešení rovnic však přenecháme do příslušné kapitoly (3.1.) a všimneme si zatím vlastností a významu Schwarzschildova řešení.

2.2.2. Význam a základní vlastnosti Schwarzschildova řešení

Jak bylo již uvedeno, metrika:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (53)$$

popisuje centrálně symetrické statické gravitační pole, popsané jediným parametrem M . Souřadnice t je čas, který lze dobře interpretovat vůči pozorovateli v nekonečnu, souřadnici r můžeme definovat jako vlastní délku příslušné kružnice dělenou 2π . Pro $r \rightarrow \infty$ nabývá (53) vlastností plochého prostoročasu.

Všimněme si, že metrika (1) není definována na $r=2M$. Tento poloměr se nazývá Schwarzschildův poloměr vymežující tzv. horizont. Dalším význačným bodem je samotný počátek souřadného systému $r=0$. Z hlediska vlastností prostoročasu nejsou však horizont a počátek souřadného systému ekvivalentní. Na $r=2M$ dosahují skalární invarianty tenzoru křivosti konečných hodnot, zatímco v $r=0$ divergují. Zdánlivá singularita (pseudosingularita, souřadnicová singularita) metriky na $r=2M$ je způsobena jen nevhodnou volbou souřadnic. Dá se ukázat, že přechodem k vhodnějšímu systému singularita vymizí, čili nemůže mít skutečný fyzikální charakter.

Naopak singulární vlastnosti metriky na $r=0$ již žádným přechodem k jiné soustavě souřadnic odstranit nelze. Jedná se o skutečnou, fyzikální singularitu, kde prostoročas má nekonečnou křivost, působí zde nekonečné slapové síly. Hovoříme o tzv. Schwarzschildově černé díře, vzniklé sféricky symetrickým gravitačním kolapsem nenabitého tělesa.

Všimněme si chodu hodin v gravitačním poli. Podle:

$$d\tau = \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$$

pro pozorovatele stojícího v gravitačním poli na pevném r, θ, ϕ máme:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt$$

takže hodiny pozorovatele v stojícího gravitačním poli jdou pomaleji než hodiny pozorovatele v nekonečnu (tedy uchráněného vlivům gravitačního pole).

Rovněž vzdálenost dvou bodů r_1 a r_2 (při $\theta = konst.$, $\phi = konst.$) není rovna jejich prostému rozdílu, ale:

$$\Delta l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

Všimněme si ještě vlastností Schwarzschildovy sféry (horizontu). Zjistíme souřadnicovou rychlost světla v radiálním směru ve Schwarzschildově metrice. Z výrazu (53) nám pro $ds^2 = 0$ plyne:

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r}$$

takže na horizontu je souřadnicová rychlost světla v radiálním směru rovna nule. Čas, který světlo potřebuje, aby se ze vzdálenosti r_1 od středu dostalo do vzdálenosti r_2 , je dán radiolokační vzdáleností:

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = r_2 - r_1 + 2M \ln \left| \frac{r_2 - 2M}{r_1 - 2M} \right|$$

Ihned vidíme, že pro $r_1 \rightarrow 2M$ je tento čas (pro pozorovatele v nekonečnu) nekonečný. Jakákoli událost, která nastane pod Schwarzschildovou sférou nemůže nijak ovlivnit vnější oblast. Proto je Schwarzschildova sféra tzv. horizont událostí.

V $r = 2M$ mění složky metrického tenzoru g_{00} a g_{11} svá znaménka:

$$\text{pro } r > 2M \begin{cases} g_{00} < 0 \\ g_{11} > 0 \end{cases} \quad \text{pro } r < 2M \begin{cases} g_{00} > 0 \\ g_{11} < 0 \end{cases}$$

Časová a radiální souřadnice si proto v jistém smyslu vymění úlohu. Částice, která se dostane pod sféru $2M$ neodvratně končí svou existenci v singularitě $r=0$ a není možné, aby se dostala zpět do oblasti $r > 2M$. (Připomeňme, že nekonečná hodnota souřadnicového času t , neznamená nekonečnou hodnotu vlastního času τ , takže částice může ve svém vlastním konečném čase proniknout pod sféru $r=2M$.)

2.3. Extrémní Schwarzschildova - de Sitterova metrika

2.3.1. Extrémní Schwarzschildovo - de Sitterovo řešení a jeho vlastnosti

Než uvedeme přímo tuto metriku, bylo by vhodné se několika slovy zmínit o tzv. kosmologické konstantě.

Když v roce 1915 Einstein aplikoval své čerstvě zformulované rovnice gravitačního pole na globální strukturu vesmíru zjistil, že se chovaly „nevhodně“, neboť nepřipouštěly statické řešení. Einstein proto do svých rovnic zavedl mnohokrát diskutovaný kosmologický člen (konstantu) Λ . Rovnice pole pak jsou:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$

Je to zároveň jediná přípustná úprava těchto rovnic, aniž by byl narušen zákon zachování energie-hybnosti. (Přidáním $\Lambda g_{\alpha\beta}$ do Einsteinova tenzoru křivosti zůstane jeho čtyřdivergence nulová.) Kosmologický člen v podstatě vyjadřuje gravitační účinky vakua, zajišťuje křivost prázdného prostoru.

Když Friedman počátkem 20. let našel své kosmologické modely expandujícího vesmíru, označil Einstein zavedení kosmologického členu jako „největší chybu své vědecké kariéry“. Tím však kupodivu historie kosmologické konstanty neskončila, naopak čas od času prožívala období své renesance, stejně jako období zatracování.

Dnešní astronomická pozorování přítomnost nenulového Λ sice přímo nepožadují, ale tuto možnost ani nevylučují. Každopádně moderní pozorování mimogalaktických objektů značně omezují možnou dnešní hodnotu kosmologického členu na řádově $|\Lambda| \leq 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$. Přesto by i tak malá hodnota mohla ovlivnit vývoj vesmíru jako celku.

Soudobá pozorování ovšem nevylučují, že v minulosti vesmíru nastávaly epochy, v nichž hodnota kosmologické „konstanty“ byla natolik velká, že klíčovým způsobem ovládala dynamiku vesmíru. Příkladem mohou sloužit tzv. inflační modely, které byly v uplynulých zhruba 15 letech v literatuře intenzívně studovány [8], [13].

Právě v kontextu inflačních modelů má značný význam studium vlastností tzv. Schwarzschildova - de Sitterova řešení, které popisuje černou díru nebo sférický objekt v inflačním vesmíru.

Vlastní Schwarzschildovo - de Sitterovo řešení je přesným řešením vakuových rovnic pole s $\Lambda > 0$. Je v jistém smyslu kombinací (jak název napovídá) již zmiňovaného Schwarzschildova řešení a tzv. de Sitterova kosmologického modelu. Asymptotická struktura tohoto řešení se neblíží plochému prostoročasu, ale má geometrii jako de Sitterovo řešení. Metrika Schwarzschildova - de Sitterova řešení má ve standardních souřadnicích tvar [3]:

$$ds^2 = -\Phi dt^2 + \Phi^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

kde

$$\Phi(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \left(\frac{\Lambda}{3}\right)r^2 \quad (54)$$

přičemž $\Lambda > 0$ a $M > 0$. Toto řešení má obecně 2 horizonty. Pro speciální případ:

$$9\Lambda M^2 = 1$$

dostáváme tzv. extrémní Schwarzschildovu - de Sitterovu metriku, pro kterou oba zmíněné horizonty splývají. Potom $\Phi(r)$ je dáno:

$$\Phi(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \left(\frac{1}{27M^2}\right)r^2$$

což je výhodné dále rozložit na součin:

$$\Phi(r) = -\frac{1}{27M^2r}(r-3M)^2(r+6M) \quad (55)$$

V této metrice tedy opravdu existuje jeden „dvojnásobný“ horizont, jak patrně z (55), na $r=3M$.

Snadno z (55) zjistíme, že $\Phi \leq 0$, podobně jako ve Schwarzschildově metrice, takže zde úlohu (časové) souřadnice přebírá r .

2.3.2. Zavedení nulových Kruskalových souřadnic

„Běžné“ typy souřadnic (sférické, cylindrické...) se ukazují být při popisu řešení Einsteinových rovnic v některých směrech nevýhodnými. Často tedy zavádíme nové souřadnice, ve kterých souřadnicové singularity vymizí. Tento postup obvykle kombinujeme s tzv. Penroseovými konformními metodami. Tyto metody nám výrazně zpřehledňují a usnadňují orientaci, jestliže se zajímáme o globální strukturu a vlastnosti dané metriky. Přitom lokálně zachovávají úhly, poměry délek. (Dá se např. ukázat, že zavedeme-li ve Schwarzschildově metrice tímto postupem nové (tzv. Kruskalovy) souřadnice a aplikujeme konformní, metody objeví se nečekaně složitá topologická struktura (Einsteinův-Rosenův most, apod..))

Konformní zobrazení se používají, chceme-li zjistit chování asymptotické struktury, neboť nám umožňují nekonečný interval „smrštit“ na konečný. Asymptotické chování radiálních geodetik všech tří typů v plochem prostoročase určují veličiny $r+t$, $r-t$, a r . (Rovnice takových geodetik při vynechání rozměrů spojených s θ a φ totiž jsou: $r=|k.t+C|$, kde k určuje sevřený úhel - a tím pádem i typ geodetiky.) Za aplikaci tzv. Penroseovy konformní metody můžeme považovat např. užití funkce arctg (na argumenty $r+t$, $r-t$, r), přičemž tato funkce jak známo, zobrazí interval $(-\infty, \infty)$ na interval $(-\pi/2, \pi/2)$.

Nyní zavedeme tzv. nulové Kruskalovy souřadnice (\hat{u}, \hat{v}) - (rozměry spojené s θ a φ není třeba transformovat) pro extrémní Schwarzschildovu - de Sitterovu metriku.

Nejprve zavedeme modifikovanou („želví“) souřadnici r^* vztahem:

$$r^* = \int \frac{dr}{\Phi(r)} = \frac{9M^2}{r-3M} + 2M \ln \left| \frac{r+6M}{r-3M} \right| \quad (56)$$

dále souřadnice:

$$\begin{aligned} u &= t - r^* \\ v &= t + r^* \end{aligned}$$

Aplikujeme „Penroseovu konformní metodu“ transformací:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -\text{arccotg} \left(-\frac{u}{\delta} \right) \\ \hat{v} &= \text{arctg} \left(\frac{v}{\delta} \right) \end{aligned}$$

kde

$$\delta = -M(3 - 2\ln 2) < 0$$

Metrika v těchto nových souřadnicích (\hat{u}, \hat{v}) je:

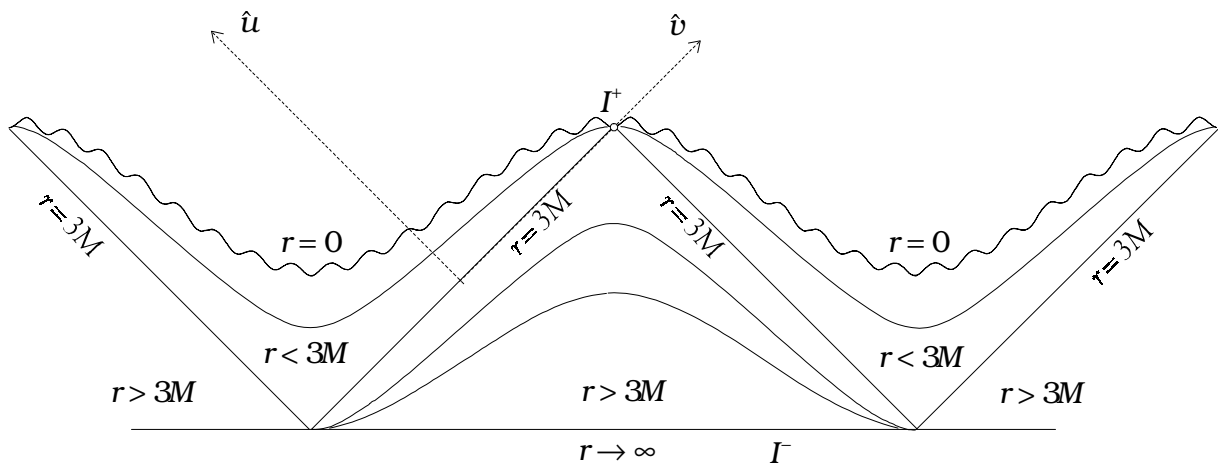
$$ds^2 = -\frac{\delta^2}{27M^2 r} \frac{(r+6M)(r-3M)^2}{\cos^2 \hat{v} \sin^2 \hat{u}} d\hat{u}d\hat{v} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (57)$$

Ačkoliv (2) není pro $r=3M$ spojitá, metrika není singulární, protože:

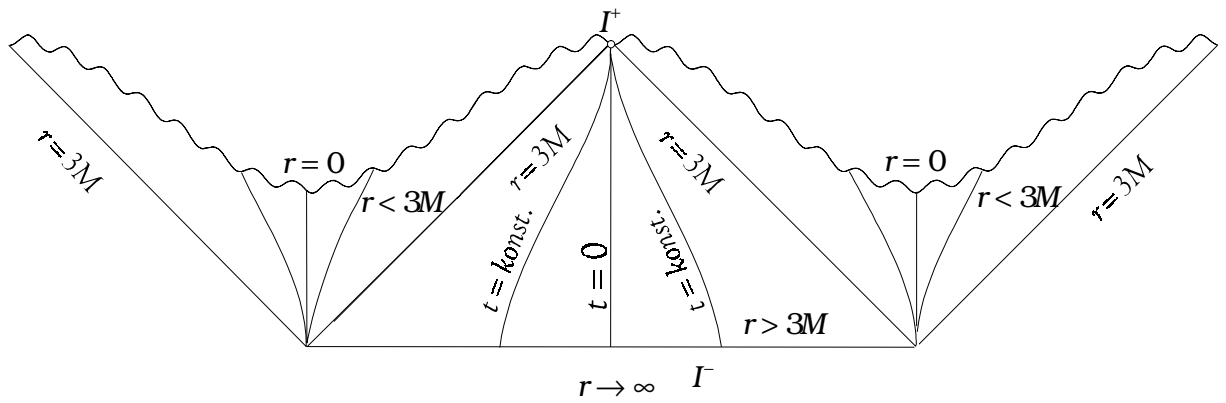
$$\lim_{r \rightarrow 3M} \frac{(r-3M)^2}{\cos^2 \hat{v}} = \lim_{r \rightarrow 3M} \frac{(r-3M)^2}{\sin^2 \hat{u}} = \frac{(18M^2)^2}{\delta^2}$$

Konformní diagram extrémního Schwarzschildova - de Sitterova řešení můžeme vidět na Obr. 2.3.2.a) a 2.3.2.b). V případě a) jsou zakresleny čáry $r=\text{konst.}$, v případě b) $t=\text{konst.}$, singularita je standardně znázorněna vlnovkou. Souřadnice (\hat{u}, \hat{v}) se nazývají nulové Kruskalovy souřadnice, protože nulové (světelné) geodetiky jsou s nimi rovnoběžné. V našem případě jsou (\hat{u}, \hat{v}) rovnoběžné s úsečkami znázorňujícími horizonty $r=3M$.

Vidíme, že extrémní Schwarzschildovo - de Sitterovo řešení má zajímavou topologii. Skládá se z periodicky se opakujících oblastí $r>3M$ a $r<3M$, jakýchsi opakujících se „vesmírů“. Spojení mezi nimi je však zřejmě pro světelné a časupodobné pozorovatele nemožné. Blíže si vlastností této metriky všimneme v souvislosti s řešením rovnice geodetiky.



Obr. 2.3.2.a)



Obr. 2.3.2.b)

3. Metodika

3.1. Numerické řešení rovnice geodetiky pro časupodobné pozorovatele ve Schwarzschildově metrice Eulerovou jednokrokovou metodou

3.1.1. Výpočet Christoffelových symbolů a sestavení rovnic

Připomeňme si nejprve definici Christoffelových symbolů pomocí metrického tenzoru:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\rho}} \right) \quad (58)$$

a Schwarzschildovu metriku:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (59)$$

Budeme uvažovat takto. Metrický tenzor má pouze diagonální složky, čili platí:

$$g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}}$$

Tyto jsou závislé na souřadnicích r a θ , přičemž indexy odpovídají souřadnicím podle:

$$x^0 = t$$

$$x^1 = r$$

$$x^2 = \theta$$

$$x^3 = \varphi$$

Jelikož je celá situace středově symetrická, částice se bude pohybovat v rovině. Závislosti na θ se zbavíme tak, že položíme $\theta = \pi/2 = konst.$ Zároveň tím říkáme, že složka čtyřrychlosti $U^2 = 0$.

Pro sestavení rovnice geodetiky budeme potřebovat jen ty Christoffelovy symboly, jejichž indexy budou různé od 2. Najít je můžeme buď tak, že zkusíme podle definice (1) různé kombinace indexů, nebo sestavíme v programovacím jazyku krátký algoritmus, který nám při zadaných nenulových $g_{\alpha\beta}$ a $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}$ příslušné kombinace indexů vyhledá.

V každém případě obdržíme:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{dg_{00}}{dr} \\
 \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{dg_{00}}{dr} \\
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} \frac{dg_{11}}{dr} \\
 \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{dg_{33}}{dr} \\
 \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2g_{33}} \frac{dg_{33}}{dr}
 \end{aligned} \tag{60}$$

Provedeme-li úpravy naznačené v (60) dostáváme konečně :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{M}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \\
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\
 \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{01}^0 = -\frac{M}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \\
 \Gamma_{33}^1 &= -(r - 2M) \\
 \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Rovnice geodetiky pak vyplývají ze (61):

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x^0}{dt^2} + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^1}{dt} &= 0 \\
 \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{33}^1 \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^3}{dt} &= 0 \\
 \frac{d^2 x^3}{dt^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^3}{dt} &= 0
 \end{aligned} \tag{62}$$

kde τ je vlastní čas (řešíme pro časupodobné pozorovatele).

3.1.2. Algoritmizace v jazyku C

Využijeme obecné Eulerovy jednokrokové metody k řešení diferenciálních rovnic, přičemž rovnice geodetiky rozložíme v soustavu podle:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = u^\alpha$$

Pomocí Eulerovy metody při kroku h nezávisle proměnné označíme:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1}^\alpha(\tau + h) - u_n^\alpha(\tau)}{h}$$

rekurentní vztahy pro numerický výpočet tedy jsou:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha &= u_n^\alpha - h \Gamma_{\beta\delta}^\alpha u_n^\beta u_n^\delta \\ x_{n+1}^\alpha &= x_n^\alpha + h u_{n+1}^\alpha \end{aligned}$$

Na tomto základě můžeme ze znalosti počátečních podmínek odvíjet řešení dál. Jsme si přitom samozřejmě vědomi, že se dopouštíme jisté numerické chyby, kterou můžeme částečně eliminovat snížením hodnoty kroku h za cenu zvýšení spotřeby strojového času.

Vlastní program pro numerické řešení rovnice geodetiky pro Schwarzschildovu metriku byl vytvořen v programovacím jazyce Borland C++ v3.0 firmy Borland International.

Algoritmus je v podstatě popsán již rekurentními vztahy a všechny potřebné informace jsou rovněž dány.

Na základě počátečních podmínek zadaných uživatelem (počáteční hodnoty souřadnic a např. jejich diferenciály) se spočítají výchozí hodnoty čtyřrychlosti:

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{\Delta x^\alpha}{\Delta \tau} \\ \Delta \tau &= \sqrt{-g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta} \end{aligned}$$

Následný výpočet při kroku h , pokračuje automaticky. Kontrolou je konstantní hodnota normy čtyřrychlosti ($g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$) podél celé trajektorie a např. zachování momentu hybnosti ($r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$).

Výsledky numerické integrace jsou uvedeny v kapitole 4.1.

3.2. Numerické řešení rovnice geodetiky pro částice a tachyony ve Schwarzschildově - de Sitterově metrice pomocí programu Famulus

3.2.1. Výpočet Christoffelových symbolů a sestavení rovnic

Extrémní Schwarzschildova - de Sitterova metrika je rovněž sféricky symetrická, takže co se týče postupu opět položíme $\theta=\pi/2=konst.$, čímž odpadnou Christoffelovy symboly, kde alespoň jeden z indexů bude roven 2.

Tento případ budeme řešit přímo užitím nulových Kruskalových souřadnic, zavedených v kap. 2.3.2.

Bude však přirozené, zadat počáteční podmínky v souřadnicích (t, r, θ, φ) a pak je teprve přepočítat do souřadnic $(\hat{u}, \hat{v}, \theta, \varphi)$. Transformace $(t, r) \rightarrow (\hat{u}, \hat{v})$ je dána jasně vzorcem v kap.

2.3.2. Vzorce pro transformaci složek čtyřrychlosti je nutné vypočítat. Označme:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= U^t & \frac{dr}{d\tau} &= U^r \\ \frac{d\hat{u}}{d\tau} &= U^0 & \frac{d\hat{v}}{d\tau} &= U^1 & \frac{d\varphi}{d\tau} &= U^3 \end{aligned}$$

Podle vzorce pro derivování složených funkcí máme:

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} U^r + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} U^t \quad \text{a} \quad \frac{d\hat{v}}{d\tau} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} U^r + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} U^t$$

Provedeme-li naznačené operace, dostaneme:

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau} = U^0 = \frac{U^r - U^t}{\delta + \frac{v^2}{\delta}} \quad \text{a} \quad \frac{d\hat{v}}{d\tau} = U^1 = \frac{U^r + U^t}{\delta + \frac{v^2}{\delta}} \quad (63)$$

V metrickém tenzoru v Kruskalových souřadnicích se však vyskytuje i původní proměnná r , která je nyní funkcí nových souřadnic \hat{u}, \hat{v} , bude třeba zjistit i derivace $\frac{\partial r}{\partial \hat{u}}$ a $\frac{\partial r}{\partial \hat{v}}$. Funkce $r = r(\hat{u}, \hat{v})$ však není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí. Příslušné derivace však můžeme zjistit pomocí inverzních transformačních vztahů pro U^r z (1). Musí platit:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial r}{\partial \hat{u}} U^0 + \frac{\partial r}{\partial \hat{v}} U^1$$

Nebo podle pravidla pro derivování složené a inverzní funkce. Každopádně:

$$U^r = \frac{\Phi(\delta + \frac{v^2}{\delta})}{2} U^0 + \frac{\Phi(\delta + \frac{v^2}{\delta})}{2} U^1 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \hat{u}} = \frac{\Phi(\delta + \frac{v^2}{\delta})}{2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial r}{\partial \hat{v}} = \frac{\Phi(\delta + \frac{v^2}{\delta})}{2}$$

Můžeme ověřit, že hodnota normy čtyřrychlosti v původních i v nových souřadnicích je stejná (invariantní veličina).

Nyní přistoupíme k výpočtu Christoffelových symbolů. Indexy odpovídají: $0 \approx \hat{t}$, $1 \approx \hat{r}$, $2 \approx \theta$, $3 \approx \varphi$. Tvar metriky viz. kap. 2.3.2.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{g_{01}} \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} = \frac{d\Phi}{dr} \frac{(\delta + \frac{u^2}{\delta})}{2} - 2 \cotg \hat{u} \\
 \Gamma_{33}^0 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{01}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -r \left(\delta + \frac{v^2}{\delta} \right) \frac{\cos^2 \hat{v} \sin^2 \hat{u}}{\delta^2} \\
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{g_{01}} \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} = \frac{d\Phi}{dr} \frac{(\delta + \frac{v^2}{\delta})}{2} + 2 \tg \hat{v} \\
 \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{01}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} = -r \left(\delta + \frac{u^2}{\delta} \right) \frac{\cos^2 \hat{v} \sin^2 \hat{u}}{\delta^2} \\
 \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} = \frac{\Phi}{2r} \left(\delta + \frac{u^2}{\delta} \right) \\
 \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{\Phi}{2r} \left(\delta + \frac{v^2}{\delta} \right)
 \end{aligned} \tag{64}$$

Kde $\frac{d\Phi}{dr}$ je složenou funkcí $\frac{d\Phi}{dr}(r(r^*(\hat{u}, \hat{v})))$, vyjádříme-li pomocí r , pak:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2r}{27M^2}$$

Ostatní $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$ jsou buď nula, nebo symetrické s (2).

Budeme uvažovat pouze radiální geodetiky ($\varphi = konst.$). Je nutné vyjádřit Christoffelovy symboly (2) v zavedených souřadnicích \hat{u}, \hat{v} . K tomu užitíme známých vztahů:

$$1 + \tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{a} \quad 1 + \cotg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Podle způsobu zavedení Kruskalových souřadnic v kap. 2.3.2. platí:

$$\delta + \frac{u^2}{\delta} = \frac{\delta}{\sin^2 \hat{u}} \quad \text{a} \quad \delta + \frac{v^2}{\delta} = \frac{\delta}{\cos^2 \hat{v}}$$

Takže Christoffelovy symboly jsou:

$$\Gamma_{\infty}^0 = \frac{\delta}{2} \frac{d\Phi}{dr} \frac{1}{\sin^2 \hat{u}} - 2 \cotg \hat{u}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\delta}{2} \frac{d\Phi}{dr} \frac{1}{\cos^2 \hat{v}} + 2 \tg \hat{v}$$

Rovnice geodetiky pak jsou (τ je v obecném případě normalizovaný parametr):

$$\frac{d^2 \hat{u}}{d\tau^2} + \Gamma_{\infty}^0 \frac{d\hat{u}}{d\tau} \frac{d\hat{u}}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 \hat{v}}{d\tau^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{d\hat{v}}{d\tau} \frac{d\hat{v}}{d\tau} = 0$$
(65)

3.2.2. Program Famulus a algoritmizace úlohy

Algoritmus byl vytvořen pomocí programu Famulus v3.5 CZ. Tento systém v sobě zahrnuje některé předem vytvořené funkce a procedury, které můžeme využívat. Jednou z nich je např. metoda Runge-Kutta 4. řádu s automaticky voleným krokem.

Úloha byla řešena právě touto metodou v kombinaci s obyčejnou Eulerovou. Obecné schéma metody Runge-Kutta 4. řádu (též modifikovaná Eulerova metoda) je:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3)\end{aligned}$$

Pro automatickou volbu kroku, užívá systém Famulus jako klíčového parametru rozdíl mezi hodnotami dosaženými jedním krokem hodnoty h a dvěma kroky hodnoty $\frac{1}{2}h$.

Jak již bylo zmíněno v předcházející kapitole, funkce $r = r(\hat{u}, \hat{v})$ není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí. Během výpočtu však aktuální hodnotu r znát musíme. Využijeme přímé iterační metody aplikovanou na rovnici:

$$\frac{v-u}{2} = r^* \quad \text{tedy} \quad \delta(\text{tg}(\hat{v}) + \text{cotg}(-\hat{u})) - 2r^* = 0$$

Víme, že:

$$r^* = \frac{9M^2}{r-3M} + 2M \ln \left| \frac{r+6M}{r-3M} \right| \quad (66)$$

Dále zavedeme pro numerický výpočet výhodné označení:

$$\begin{aligned}p &= \frac{r-3M}{r} \\p^* &= \frac{r^*}{3M}\end{aligned}$$

a upravíme (1):

$$\frac{9M^2}{r-3M} = r^* - 2M \ln \left| \frac{r+6M}{r-3M} \right|$$

$$\frac{1}{p} = p^* + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{p}{p+3} \right|$$

$$p = \frac{1}{p^* + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{p}{p+3} \right|}$$

Pomocí přímé iterace:

$$p_{n+1} = \frac{1}{p^* + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{p_n}{p_n+3} \right|}$$

Tato metoda konverguje pro $|p^*| \geq 1$. V cyklu pak počítáme hodnoty tak dlouho, dokud rozdíl dvou následujících je větší, než zvolená přesnost.

Všimněme si, že metrika, ani Christoffelovy symboly nejsou pro $r=3M$ spojité. V jejich okolí dochází k dramatickému nárůstu numerické chyby, neboť počítač zaokrouhluje. Zároveň se zmenšuje i hodnota kroku a řešení není možné protáhnout přes horizont. Tento problém můžeme řešit např. tak, že v určité vzdálenosti od horizontu „přepneme“ řešení na Eulerovu metodu, a v podstatě tak lineárně extrapolujeme přes $r=3M$.

Výsledky uvádíme v kapitole 4.2.

Jako kontrolu postupu standardně zvolíme sledování odchylek od hodnoty $U^\alpha U_\alpha$, která je v našem případě -1 resp. $+1$ (pro časupodobné resp. prostorupodobné pozorovatele).

4. Výsledky

4.1. Numerické řešení rovnice geodetiky pro časupodobné pozorovatele ve Schwarzschildově metrice Eulerovou jedнокrokovou metodou

Uvedeme 6 zajímavých případů:

Obr. 4.1.a)

Pouze pro kontrolu počátečních podmínek a poměrně zajímavé porovnání se skutečností jsme zvolili tento případ. Schwarzschildova černá díra má hmotnost Slunce ($1,99 \cdot 10^{30}$ kg). Ve vzdálenosti $1 AU$ ($=1,496 \cdot 10^{11}$ m) necháme obíhat testovací částici, s počáteční rychlostí $v=29.77 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ udělenou kolmo na radiální směr.

Jako výsledek skutečně obdržíme kruhovou orbitu s dobou oběhu (přibližně) $31\,536\,000$ s, tedy 1 rok.

Obr 4.1.b)

Jako důkaz toho, že z hlediska vnějšího pozorovatele částice nedosáhne horizontu ($r=2M$) v konečném čase, uvádíme tento příklad. Horizont je znázorněn kružnicí, částice se blíží v radiálním směru stále pomaleji, až se nakonec téměř „zastaví“.

Obr 4.1.c)

Černá díra o hmotnosti naší Země (přibližně $6 \cdot 10^{24}$ kg) je opět znázorněna bodem a Schwarzschildova sféra kružnicí. Částici ve vzdálenosti 0.04 m byla udělena úniková počáteční rychlost kolmo na radiální směr. Její hodnota je jak známo:

$$v_p = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \approx 1,41456 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Obr. 4.1.d)

Předpověď OTR se od Newtonovské liší nejzřetelněji v oblasti zhruba do 10 Schwarzschildových poloměrů. Setkáváme se zde s neuzavřenými trajektoriemi, a tedy s dráhami, které v klasické mechanice nejsou přípustné.

Zde je znázorněna černá díra i s horizontem a dráha částice (počáteční rychlost opět kolmo na radiální směr).

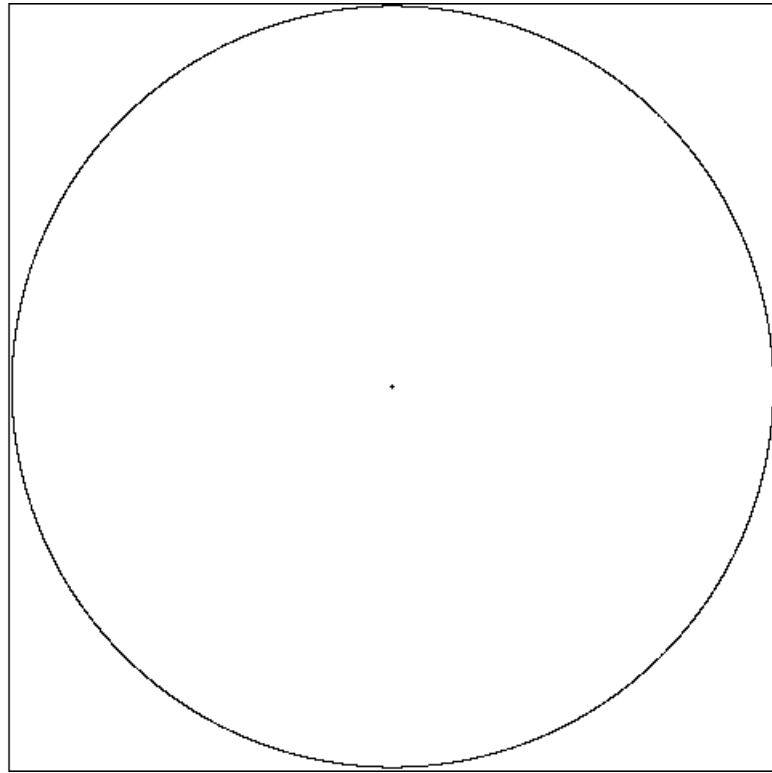
Obr. 4.1.e)

Obdobná situace jako na Obr. 4.1.d) s tím, že částici byla udělena kruhová rychlost s malou odchylkou. Vyvine se tak eliptická dráha se silně se stáčející hlavní poloosou.

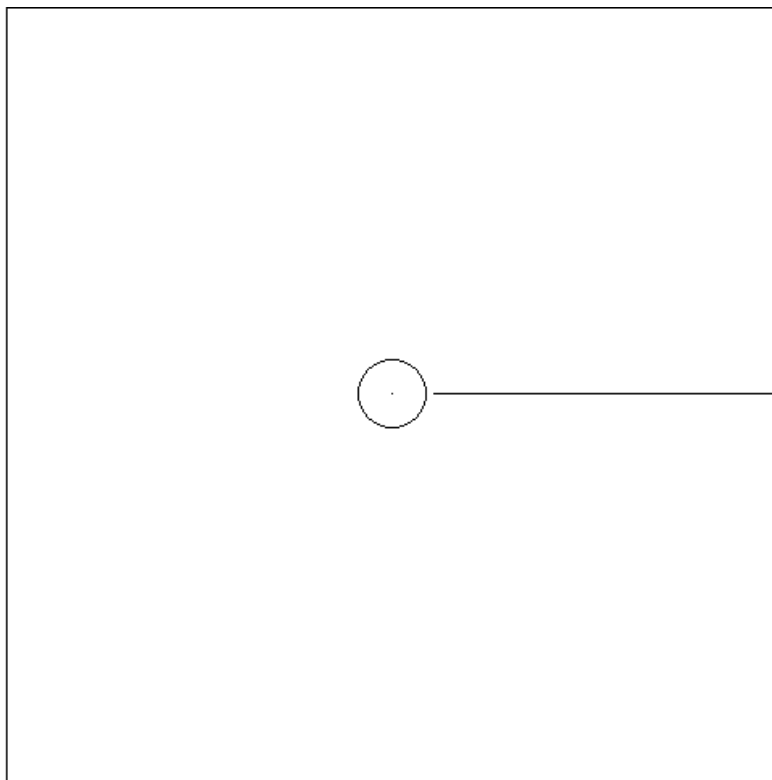
Obr. 4.1.f)

Zde uvádíme klasický případ tzv. stáčení hlavní poloosy eliptické dráhy. Stáčení probíhá ve směru oběhu.

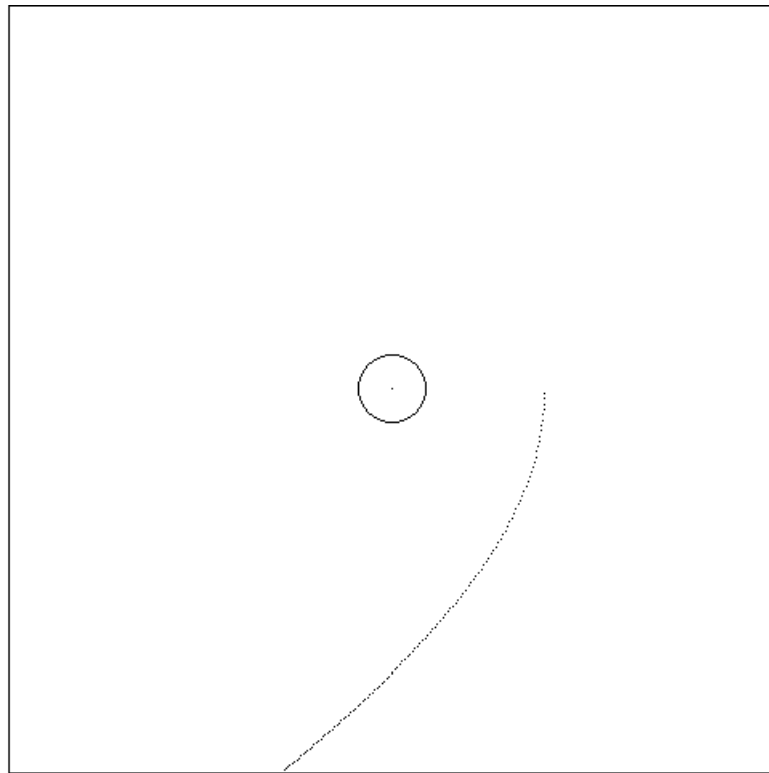
Obdobný efekt (i když mnohem méně patrný) můžeme pozorovat např. u první planety sluneční soustavy - Merkura (viz. 2.1.1.).



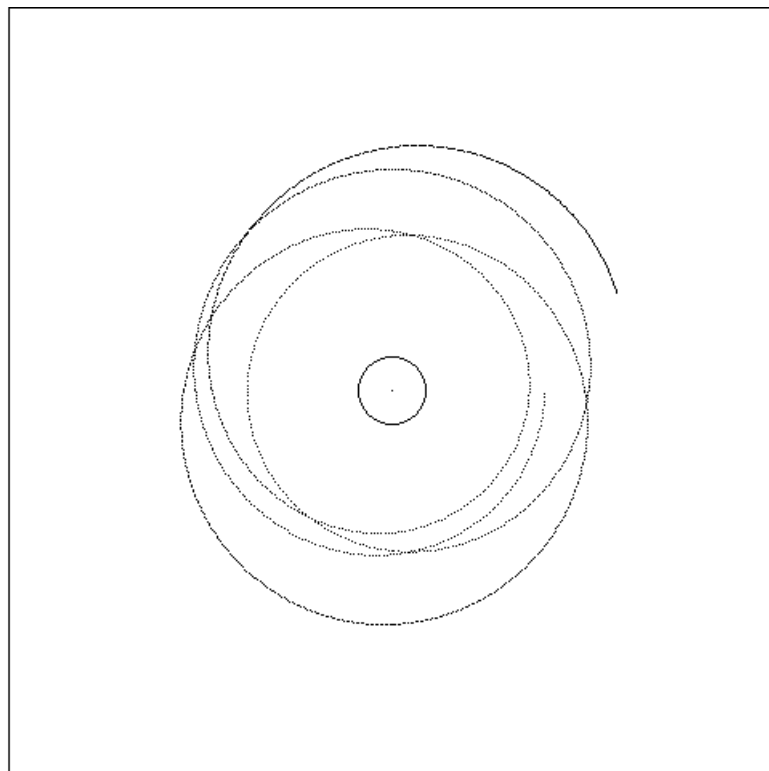
Obr. 4.1.a)



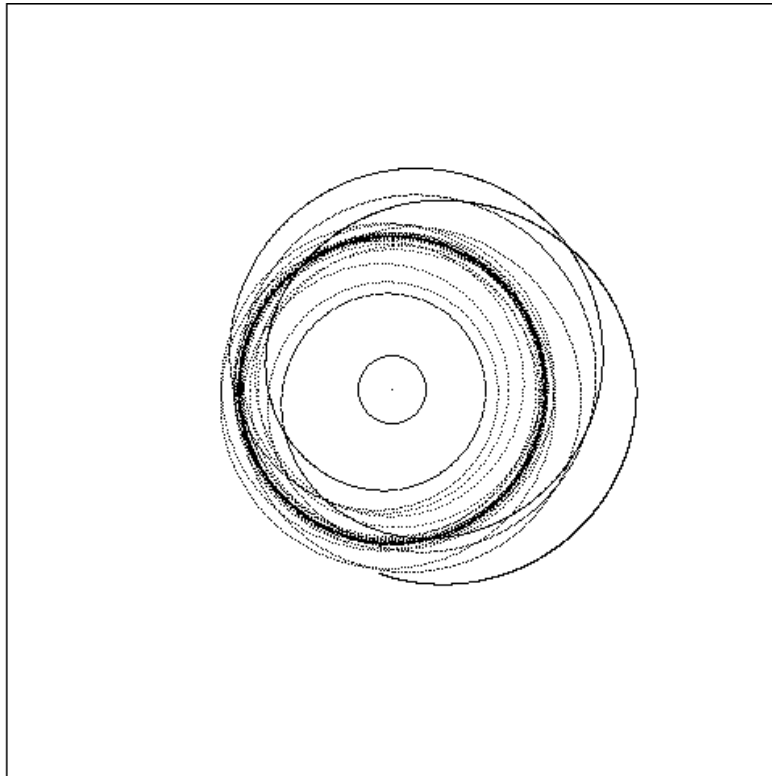
Obr. 4.1.b)



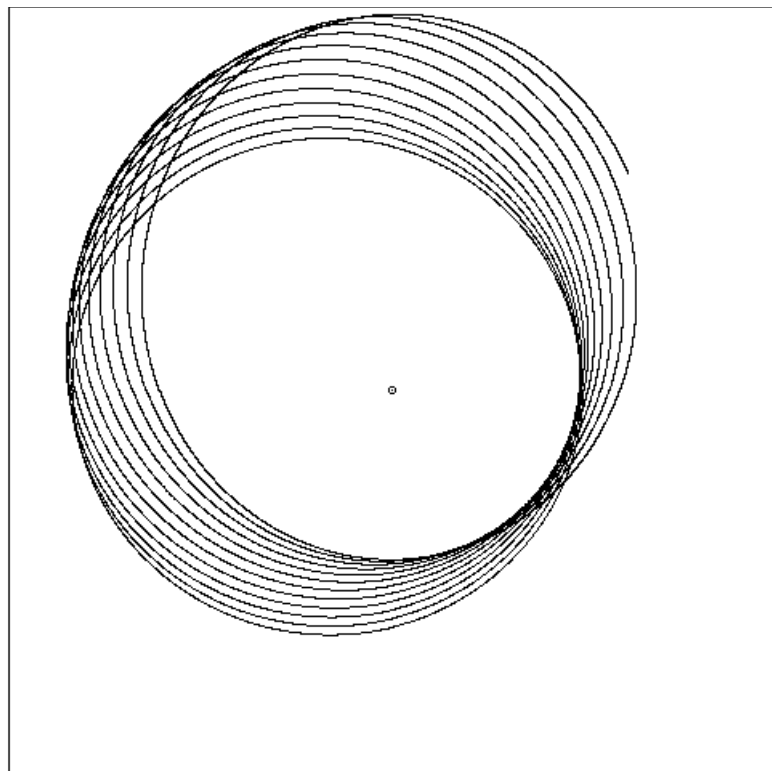
Obr. 4.1.c)



Obr. 4.1.d)



Obr. 4.1.e)



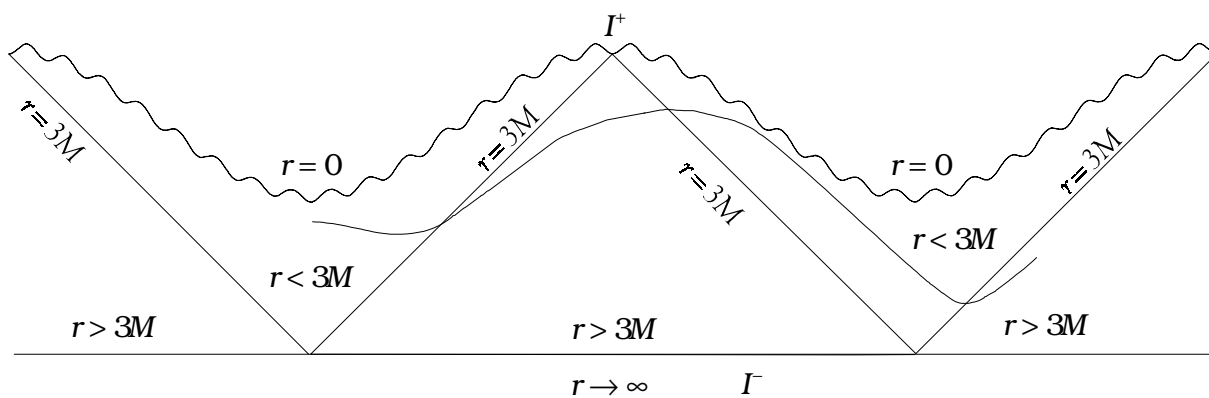
Obr. 4.1.f)

4.2. Numerické řešení rovnice geodetiky pro částice a tachyony ve Schwarzschildově - de Sitterově metrice pomocí programu Famulus

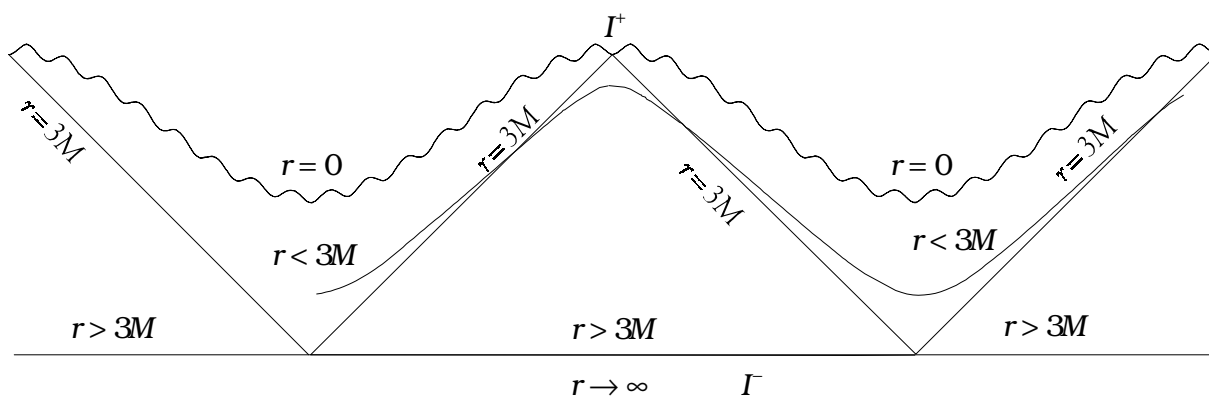
Uvedeme 9 reprezentativních případů. Všechny byly řešeny metodou Runge-Kutta 4. řádu s automaticky voleným krokem, v kombinaci s Eulerovou metodou ve vzdálenosti $0.2M$ od horizontu.

Shrňme přehledně soubor počátečních podmínek do tabulky, jednotlivé aspekty řešení rozebereme později. (Počáteční hodnoty mají index 0 dole.)

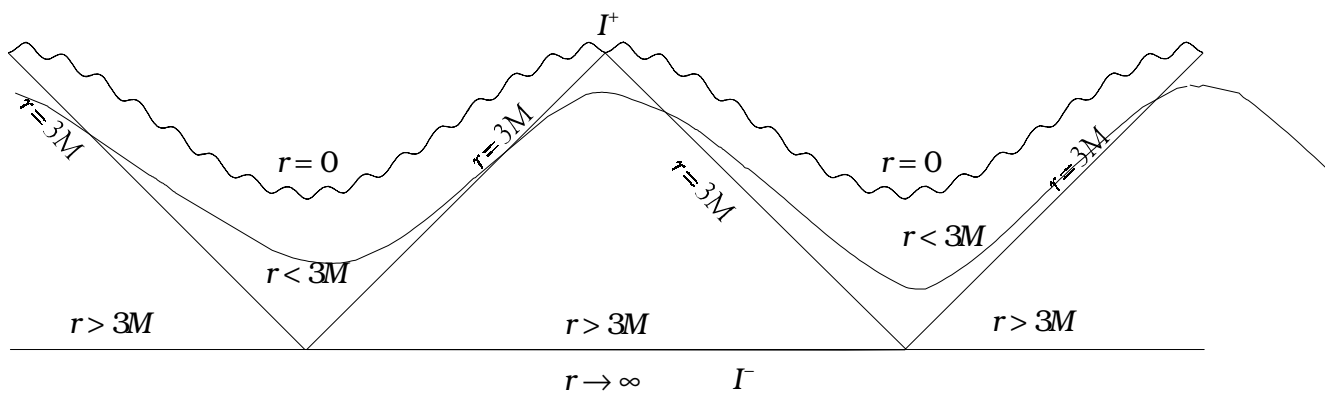
Obrázek	t_0	r_0	$U^t = E$	U^r	$U^\alpha U_\alpha$
42.a)	0	$1M$	1	0	1
42.b)	0	$2M$	1	0	1
42.c)	0	$5M$	1	0	1
42.d)	0	$5M$	10	-1	1
42.e)	0	$11M$	0	-1	-1
42.f)	0	$100M$	0	-1	-1
42.g)	0	$50M$	0.01	-1	-1
42.h)	0	$50M$	0.05	-1	-1
42.i)	0	$28M$	0.2	-1	-1



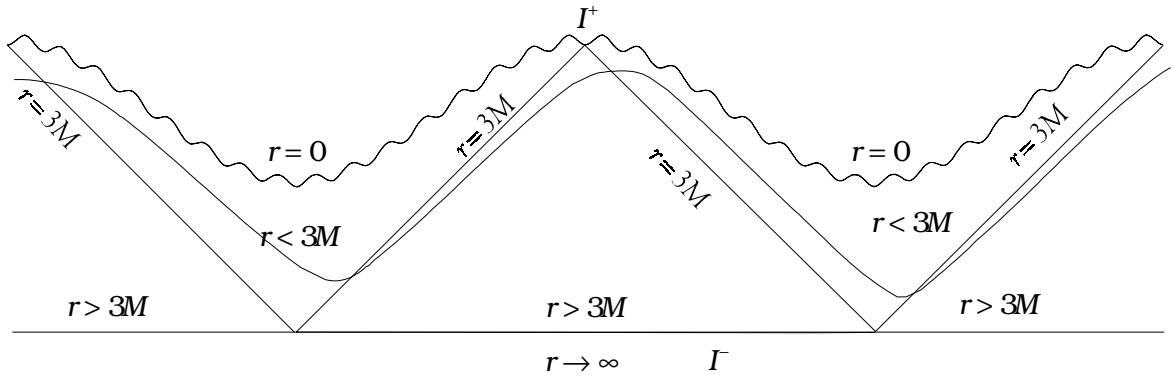
Obr. 4.2.a)



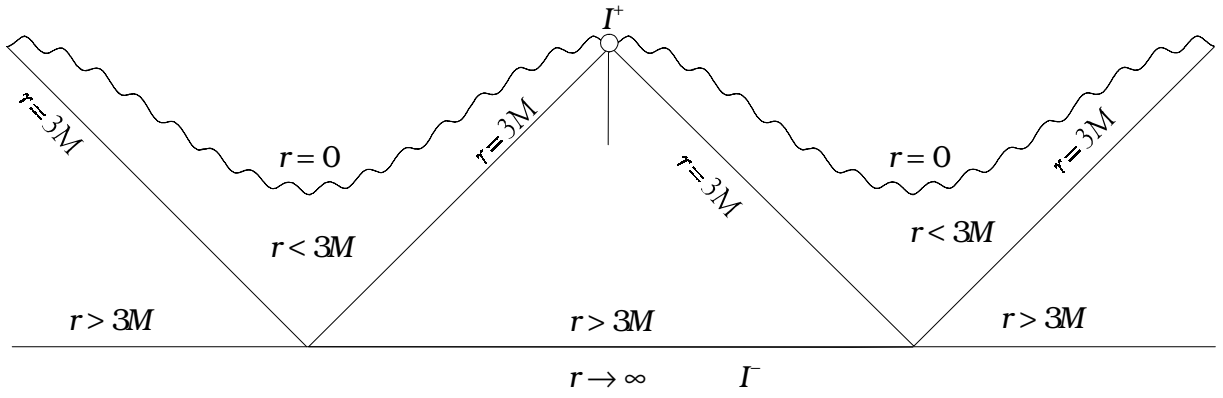
Obr. 4.2.b)



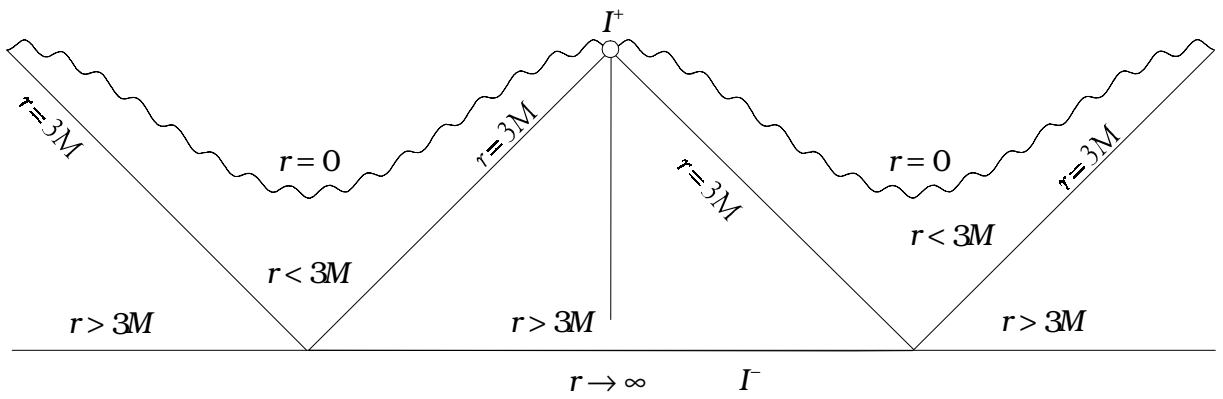
Obr. 4.2.c)



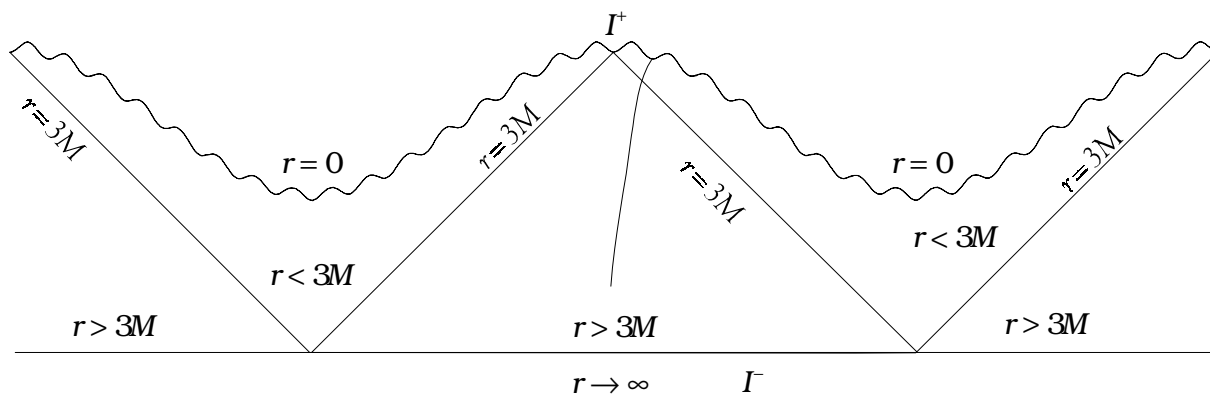
Obr. 4.2.d)



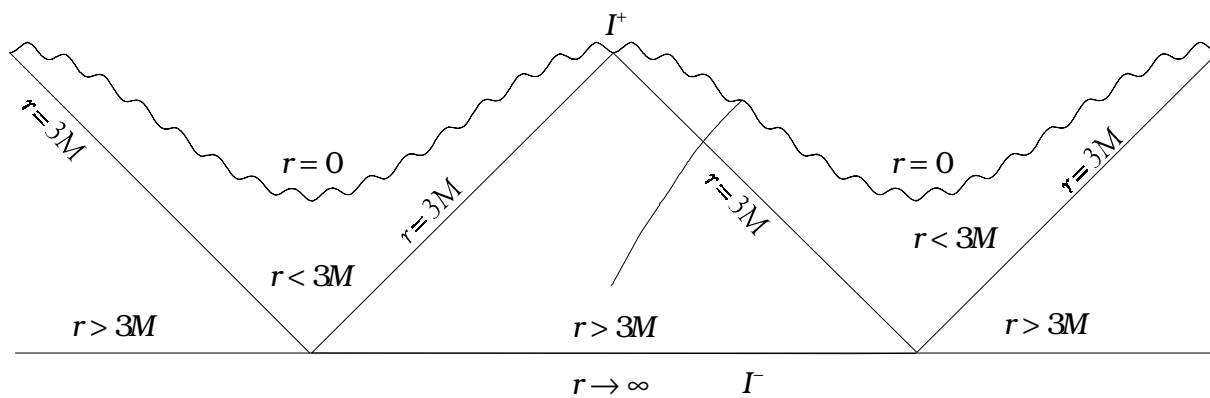
Obr. 4.2.e)



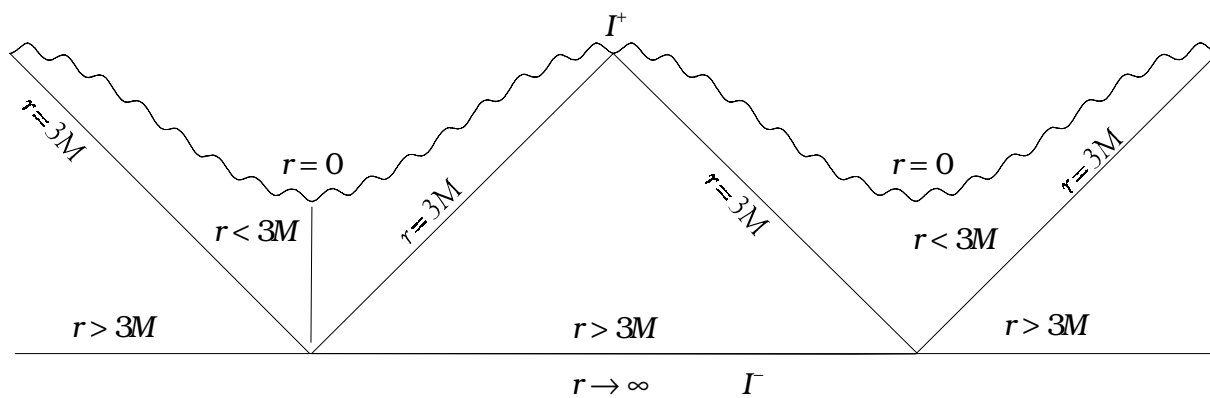
4.2.f)



Obr. 4.2.g)



Obr. 4.2.h)



Obr. 4.2.i)

5. Závěr a diskuse

Cílem předkládané práce, bylo pochopit chování částic a tachyonů v prostoročasech popisujících černé díry a sférické objekty v inflačním modelu vesmíru. Trajektorie jsme získali numerickým řešením rovnice geodetiky pro případ extrémní Schwarzschildovy - de Sitterovy metriky. Všimněme si blíže některých aspektů získaných řešení pro prostorupodobné a časové geodetiky. Nulové geodetiky jsou (jak bylo řečeno v kap. 2.3.2.) rovnoběžné se souřadnými osami \hat{u} a \hat{v} a jejich trajektorie v konformním diagramu jsou proto zřejmé.

Důležitou veličinou jednoznačně od sebe odlišující vlastnosti geodetik je v asymptoticky plochem prostoročase „energie“ měřená vzdáleným pozorovatelem v nekonečnu.

Časová složka čtyřhybnosti je (m_0 je klidová hmota):

$$p^0 = m_0 U^t = m_0 \frac{dt}{d\tau} \quad (67)$$

Podle (67) a porovnáním s rovnicí geodetiky pro složku t pak označíme:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{\Phi} \quad (68)$$

V případě $\Lambda=0$ má E význam energie částice měřené pozorovatelem v nekonečnu. Pro $\Lambda \neq 0$ již taková přímočará interpretace není možná, veličina E je ovšem i nadále integrálem pohybu a lze jí proto použít ke klasifikaci geodetik ve studovaných prostoročasech.

Nejprve si všimneme *prostorupodobných geodetik* ($U^\alpha U_\alpha = 1$). Takové geodetiky jsou sice „nefyzikální“, ale v jistém smyslu může toto řešení posloužit jako matematická sonda, odhalující některé globální vlastnosti dané metriky.

Jak je patrné již z konformního diagramu (kap. 2.3.2., Obr. 2.3.2.a)) opakující se oblasti $r > 3M$ a $r < 3M$ jsou „spojeny“ dohromady horizonty $r=3M$. Možnost „prolétnout“ těmito oblastmi mají pouze tachyony. Vidíme, že tak se chovají všechny tachyony na Obr. 4.2.a) až 4.2.d).

Pro *hmotné částice (časupodobné pozorovatele)* ($U^\alpha U_\alpha = -1$) rozlišíme dva význačné případy:

$$1) E = 0 (U^t = 0)$$

Tento případ je znázorněn na obrázcích 4.2.e) a 4.2.f). Tito pozorovatelé ve svém konečném vlastním čase nikdy nedosáhnou horizontu $r=3M$. Odlétají do bodu I^+ , tedy časového nekonečna budoucnosti.

$$2) E \neq 0 (U^t \neq 0)$$

Tyto případy jsou znázorněny obrázky 4.2.g) až 4.2.i). Časupodobní pozorovatelé vypuštění za těchto podmínek ve svém konečném čase nevyhnutelně překročí horizont $r=3M$ (jsou-li vypuštění z $r_0 > 3M$) a dosáhnou singularity ($r=0$) kde končí svou existenci.

6. Resumé

Ověřili jsme, že geodeticky úplná varieta extrémního Schwarzschildova - de Sitterova řešení obsahuje nekonečně mnoho opakujících se „vesmírů“, které jsou navzájem propojeny horizonty v „prostorovém“ směru a jsou tak přístupné pouze tachyonům. Dále jsme zjistili, že existují dva význačné typy časupodobných pozorovatelů $E=0$ a $E \neq 0$ (viz. kapitola 5) jejichž chování v této metrice je zcela odlišné.

V prostoročase proto existují asymptotické oblasti, které se v konformním diagramu zobrazí vždy do jediného bodu - I^+ .

Studované prostoročasy a chování geodetik v nich mohou sloužit jako příspěvek k pochopení globální struktury „extrémních“ řešení v inflačních modelech vesmíru. Přestože práce má výrazně teoretický charakter, mohou zkoumaná řešení sloužit nejen jako „testovací modely“ pro numerickou relativitu, ale mohou odhalit i některé obecné rysy řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole s kladnou kosmologickou konstantou. V tomto smyslu je proto příspěvkem ke studiu raných fází vývoje našeho vesmíru.

7. Seznam literatury

- [1] Barrow J.D. and Götz G., *Class. Quantum Grav.* 6, 1253 (1989)
- [2] Bazanski S.L. and Ferrari V; *Nuovo Cim.* 91B, 126 (1986)
- [3] Bičák J. and Podolský J., The global structure of Robinson-Trautman radiative space-times with cosmological constant, *Phys. Rev D*55, 1985 (1997)
- [4] Brill D. and Hayward S.A.: *Class. Quantum Grav.* 11, 359 (1994)
- [5] Dvořák L.: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1984
- [6] Horský J.: *Úvod do teorie relativity*, Praha, SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1975
- [7] Kastor D. and Traschen J.: *Phys. Rev. D*47, 5370 (1993)
- [8] Kolb E.W. and Turner M.S.: *The Early Universe*, Addison - Wesley, Redwood City, 1990
- [9] Lake K. and Roeder R.C.: *Phys. Rev. D*15, 3513 (1977)
- [10] Maeda K., Fifth Marcel Grossman Meeting on General Relativity, Proceedings, Perth, Australia, 1988, edited by D.G.Blair, M.J.Buckingham, and R.Ruffini (World Scientific, Singapore, 1989), p. 145
- [11] Misner C.W., Thorne K.S., and Wheeler J.A.: *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973)
- [12] Nakao K., Nakamura T., Oohara K., and Maeda K., *Phys. Rev. D*43, 1788 (1991); K. Nakao, K. Maeda, T. Nakamura, and K. Oohara, *ibid.* 50, 708 (1994)
- [13] Olive K.A.: *Inflation*, *Physics Reports* 190, 307 (1990)
- [14] Rektorys K. a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I a II*, Praha, Nakladatelství Prometheus, 1995
- [15] Ullmann V.: *Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu*, Ostrava, Československá astronomická společnost ČSAV, 1986
- [16] Wald R.M., *Phys. Rev. D*28, 2118 (1983)